

回転楕円体上の測地線及び航程線の算出について[†]

長坂直彦*

Computation of geodesics and rhumb lines on spheroid[†]

Naohiko NAGASAKA*

Abstract

In Japan, domestic laws for surveying and hydrographic services define the shape of the Earth as an oblate spheroid (ellipsoid). Therefore, in order to determine precise positions and distances in accordance with those laws, the geometry on spheroid is required. The geometry is also essential to precise maritime delimitation such as computing equidistant lines between Japan and adjacent countries as the limit of exclusive economic zone of Japan. This report introduces some basic concepts of geometry on the spheroid, especially, geodesics and rhumb lines. It also describes a full detail of a method to compute geodesics proposed by T. Vincenty in 1975.

1 はじめに

水路業務法や測量法において、水路測量や測量が準拠すべき地球の形状として回転楕円体が規定されている。そのため、それらの法律に基づき地球上での位置や距離を正確に把握するためには、回転楕円体上の幾何学が必要である。また、相対国も同様に回転楕円体を用いていることから、地理的中間線の算出等、我が国の管轄海域の精密な画定にも回転楕円体上の幾何学は必要不可欠な知見である。しかしながら、計算機による実装済みのプログラム等が身近になった現在、初学者にとっての資料はかえって少ないように思われる。

回転楕円体上の幾何的な概念のうち、最も基礎となる距離や方位の計算方法についてはこれまで多くの研究がなされてきた。特に回転楕円体上の2点を最短で結ぶ測地線に沿った長さを2点の距離と定義する場合には、計算式に楕円積分が含ま

れることから解析的に解くことは不可能である。そのため、積分を級数展開し距離精度を1mm以下に抑えたRudoeによる計算法(Bomford, 1980, pp. 117)や変分法による積分の計算法(辰野, 1989)が提唱されてきた。

しかし、それらの論文等では必ずしも式にいたるまでの説明が十分ではない場合がある。

そのため本稿では、既存資料をもとに大学教養課程程度の解析学の知識で、回転楕円体上の幾何学の基本的な事項からはじめ、測地線及び航程線の算出まで解説を行うこととする。既存資料としては、Web上でも現在入手できるE. Williamsによる「Navigation on the spheroidal earth」(Williams, 2002)が、回転楕円体上の幾何学の基本的な事項を含んでいることから、これを紹介するとともに、一部追記及び誤りを修正することとした。また、それを踏まえて、測地学において広く

[†] Received November 16, 2012 ; Accepted January 29, 2013

* 海洋情報課 Oceanographic Data and Information Division

用いられている T. Vincenty による距離計算法 (Vincenty, 1975) を詳述した。

Vincenty (1975) による距離計算法は、前述の積分を級数展開したものに対し、計算量を減らすため入れ子形とすべく係数等に処理を施したものである。

同手法については、測地学の一般的な教科書である (Bomford, 1980, pp. 123) や Rapp (1993) その他の資料において簡単に触れられているが、基礎的な事項から式の展開まで詳細に解説したものは、筆者の知る限り無い。

本稿の構成は、第 2 節において楕円体上の幾何学の基本的な性質及び楕円体上の線分の距離式の解説、第 3 節において航程線の解説、第 4 節において回転楕円体上の測地線の解説を行った。ここまでは Williams (2002) による資料を主に和訳しているが、各節の前書き及び文中で「※」を付与した部分は筆者の追記・修正である。これらを踏まえて第 5 節では Vincenty (1975) の詳細な説明を行った。末尾には付録 1 として、Williams (2002) における記述に対する追記及び誤りの修正を行ったほか、付録 2 として、変分法による測地線の条件式の導入、付録 3 としてプログラミングによる Vincenty (1975) の実装に適した表記及び本稿で用いた記号の凡例を記載した。

数式の展開には一部、数式処理ソフト Maxima を使用している。本稿の訳文または主に第 5 節以降の記述においての誤りは全て筆者に帰着する。

2 回転楕円体の幾何学

本節では Williams (2002) に従い、回転楕円体上の幾何学に必要な基礎的な事項を述べる。

多くの目的において地球の形状を球体として取り扱うことは適切であるが、実際には地球の平均水面はそれとは異なった幾何学形状でより正確に近似される。それは扁平な回転楕円体であり、一つの楕円体を短軸の周りに回転することで得られる。球体に比べて、回転楕円体は極で潰れた形状をしている。地球の扁平率は極めて小さく約 300 分の 1 であり、それらの扁平率を仮定しても航法

上、ほとんどの場合で差が小さいため、球での近似は大体的場合適切なものとなる。球においては、一般的に用いられる座標系は緯度と経度であるが、回転楕円体においても同じである、しかし回転楕円体においては「緯度」が何を指しているのか注意しなければならない。

Fig. 1 は回転楕円体の極軸に沿った断面図である。O 点は回転楕円体の中心で、B 点は北極である (※回転楕円体上の概念的な北極である)。子午線で構成される楕円の長軸 OA の長さを a とし、短軸 OB の長さを b とする。楕円上のある点 P は座標 $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ であり、 $\angle AOP'$ は更成緯度 (reduced or parametric latitude) と呼ばれる。点 P' は点 P から OB の構成する地軸と平行に伸ばした線上で、中心から半径 a の点である。 $\angle AOP$ は地心緯度 (geocentric latitude) と呼ばれる。しかしながら、航法や測地学において用いられる緯度は測地緯度 (geodetic latitude) (※通常、測量等で得られる緯度はこれにあたる) と呼ばれるものであり、それは点 P 上の地平線と極軸のなす角であると定義される。それは Fig. 1 では角度 ϕ に等しい。経度 L は球と回転楕円体では全く同じ定義である。すなわち、子午

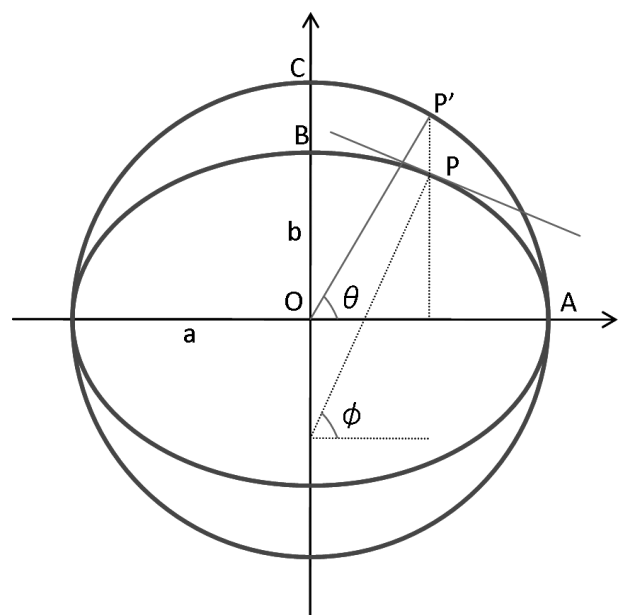


Fig. 1 Cross section of the spheroidal earth.

線と基準子午線との間の角度である。また、ここでは通常の約束通り、北向きの緯度と東向き of 経度を正として扱う。3次元直交座標において、回転楕円体上の点は $(a \cos \theta \cos L, a \cos \theta \sin L, b \sin \theta)$ として表される。回転楕円体の形状を表すものとして、長軸と短軸の半径 a, b 以外を用いる方法もある。扁平率 f (flattening) は $f = 1 - b/a$ で定義され、離心率 e (eccentricity) は $e^2 = 1 - b^2/a^2$ で定義される。WGS 84 の回転楕円体では、 $a = 6378,137\text{m}$ 、 $f = 1/298.257223563$ である。定義から e と f は、

$$e^2 = f(2-f) \tag{1}$$

(※ $e^2 \cong 6.69 \times 10^{-3}$ 、 $f \cong 3.35 \times 10^{-3}$ 程度である。また、上記の a, f の値は水路業務法施行令で規定されている値と一致する) で表されることとなる。

(1) 微分幾何学

本項では Williams (2002) に従い、回転楕円体上の緯度や曲率の概念を導入し、回転楕円体上の微小三角形における緯度、経度、方位及び距離の関係を整理する。

楕円の子午線に沿った更成緯度の変位 $d\theta$ は Fig. 2 の通りである。極軸に沿った方向の変位は $d(b \sin \theta) = b \cos \theta d\theta$ となり、赤道 (水平) 方向の変位は $d(a \cos \theta) = -a \sin \theta d\theta$ である。

このことから、測地緯度と更成緯度の関係は以下で得られる (※付録 1 に解説を追記した)。

$$\tan \phi = (a/b) \tan \theta \tag{2}$$

そして、子午線方向の変位は以下を得る (※付録 1 に解説を追記した)。

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta &= a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= a \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi = R_\phi d\phi \end{aligned} \tag{3}$$

R_ϕ は点 P の子午線曲率半径という。

また、OB 軸からの距離 OD については、

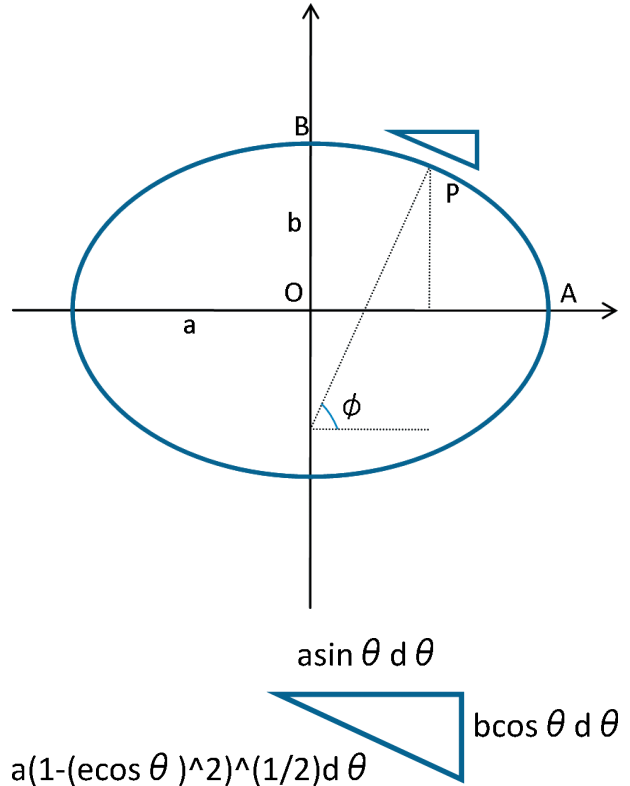


Fig. 2 Cross section of the spheroidal earth along a meridian and enlarged view.

$$OD = a \cos \theta = \frac{a \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \tag{4}$$

Fig. 3 より更成緯度と経度の微小な変位 $d\theta$ 、 dL により、北方向に $a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} d\theta$ 、そして東方向に $a \cos \theta dL$ 、それぞれ変位が生じる。

故に三平方の定理から、楕円体上の微小な曲線の長さ ds は

$$ds^2 = a^2 (\cos^2 \theta dL^2 + (1 - e^2 \cos^2 \theta) d\theta^2) \tag{5}$$

そして、(3) 式より (※付録 1 に説明を追記した)

$$ds^2 = a^2 \left(\frac{\cos^2 \phi dL^2}{1 - e^2 \sin^2 \phi} + \frac{(1 - e^2)^2 d\phi^2}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^3} \right) \tag{6}$$

方位 α については以下を得る (※最初の等式は Fig. 3 から自明である。その次の等式は付録 1 に説明を追記した)。

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}} \frac{dL}{d\theta} \\ &= \frac{\cos \phi (1 - e^2 \sin^2 \phi)}{1 - e^2} \frac{dL}{d\phi} \end{aligned} \tag{7}$$

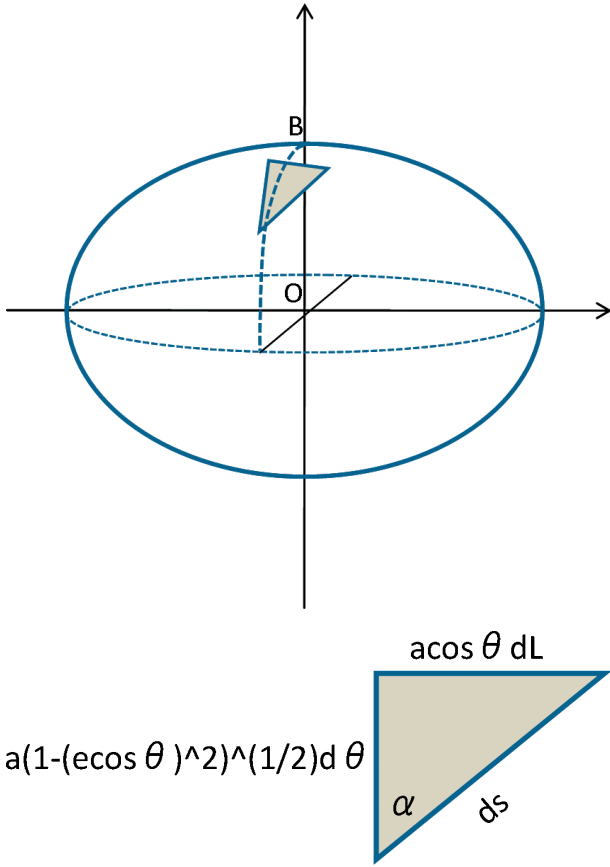


Fig. 3 The spheroidal earth and its infinitesimal triangle with azimuth alpha.

ここでは再び (2) 式を用いて、更成緯度を測地緯度に変換している。与式 (5), (6) 及び (7) は回転楕円体上の距離と方位の関係を表す基本的な式である。

3 航程線

本節では Williams (2002) に従い、回転楕円体上の航程線概念を述べる。

航程線 (rhumb line) とは、方位を一定に保つ道程のことである。それゆえ、回転楕円体上の航程線は (7) 式を α を定数として満たすこととなる。(7) 式を積分することで、始点 (ϕ_1, L_1) を通って α の方位角を有する航程線上の点 (ϕ_2, L_2) については、

$$L|_{L_1}^{L_2} = \left[\frac{\tan \alpha}{2} \log \left(\left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \left(\frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right)^e \right) \right]_{\phi_1}^{\phi_2}$$

$$= \left[\tan \alpha \log \left(\tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right)^{e/2} \right) \right]_{\phi_1}^{\phi_2} \quad (8)$$

の式が満たされる (※ (8) 式の右辺を α を定数として ϕ で微分すればよい)。

逆に、経度 L_2 が与えられたときに、緯度 ϕ_2 を求めるには、 $\phi = \phi_1$ をスタートとし、以下の式を繰り返すことで得られる。

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + 2 \text{Arc tan } P(\phi, \phi_1, L_2, L_1) \quad (9)$$

※ただし、 $P(\phi, \phi_1, L_2, L_1)$ は

$$\tan \left(\frac{\phi_1 + \pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1 + e \sin \phi}{1 - e \sin \phi} \right)^{e/2} \exp \left(\frac{L_2 - L_1}{\tan \alpha} \right) \text{ とする.}$$

また、(6) (7) 式から方位角 α を一定にすることで、航程線の弧長 s_R を求める微分方程式を得る (※第5節で追記する)。

$$\frac{ds_R}{d\phi} = \frac{a(1-e^2)}{\cos \alpha (1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \quad (10)$$

これにより、弧長 s_R は

$$s_R = \frac{M(\phi) - M(\phi_1)}{\cos \alpha} \quad (11)$$

ただし、 $M(\phi)$ は子午線に沿って赤道から緯度 ϕ まで測った際の距離であり、下記で表される (※ (3) 式より自明)。

$$M(\phi) = a \int_0^\phi \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 \phi')^{3/2}} d\phi' \quad (12)$$

形式的には第二種楕円積分 $E(\phi, e)$ の項で表され、

$$M(\phi) = a \left(E(\phi, e) - \frac{e^2 \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \right) \quad (13)$$

これらを $O(e^6)$ の項まで展開してやると、 $M(\phi)$ は近似的に

$$M(\phi) = a \left[\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \dots \right) \phi - \left(\frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024} + \dots \right) \sin 2\phi + \left(\frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} + \dots \right) \sin 4\phi \right]$$

$$-\left(\frac{35e^6}{3072}+\dots\right)\sin 6\phi+\dots\left] \quad (14)$$

となる。

完全に緯線に沿った東西方向の航程線は (8), (11) 式で発散してしまうが, この場合は ϕ が一定のため, (6) 式から以下を得る (※ Fig. 3 より自明)。

$$s_R = \frac{a \cos \phi (L_2 - L_1)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (15)$$

x 軸に経度を, y 軸に与式 (8) のうち $\tan \alpha$ 以後の項 $\log\left(\tan\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi}\right)^{e/2}\right)$ を緯度 ϕ に対する関数として用いた写像を (基準緯度を赤道とした) メルカトル図法と呼び, その図法上, 航程線は一定の方位角で直線として表現される (※ Williams (2002) 中, 緯度 ϕ に対してメルカトル図法の関数として $M(\phi)$ が挙げられているのは誤りである。メルカトル図法については野村 (1983) 等を参照)。

4 回転楕円体上の測地線

本節では Williams (2002) に従い, 回転楕円体上の測地線概念と条件式を導入する。また, 回転楕円体上に補助球概念を導入することで, 測地線の距離を算出するための微分方程式を述べる。さらに, Vincenty (1975) を第 5 節で詳述する上で必要となる回転楕円体と補助球の経度差概念を述べる。

ある滑らかな曲面上の 2 点を結ぶ最短の道をその曲面上の測地線と呼ぶ。通常の平面では測地線は直線となり, 球体では大円が測地線となる (大円航法)。注意すべきこととして, 摩擦なしに滑っていく道は常に測地線となる。これは測地線の定義による特徴が, その道の各点で局地的な曲率の中心が常に接平面に垂直であるということによる。すなわち, 測地線からその粒子を偏向させるような接平面上の力が存在しないということである。変分法による一般的な計算から与えられた曲面の計量 (※すなわち (5), (6) 式) について測地線の方程式を導くこともできるが, ここでは

より単純な議論を行う (※変分法による測地線の方程式の導出は付録 2 に追記した)。

質量 m の粒子が回転楕円体の表面を滑っていると仮定する。平面に垂直な一定の力は, 仕事を行わないので, 粒子の運動エネルギー $mv^2/2$ とその速度 v は一定である。加えて, 回転楕円体の対称性から全ての平面に垂直なベクトルは極軸を通るため, 一定の力は極軸に関してモーメント 0 である。それゆえ極軸に沿った角運動量は保存される。Fig. 1 と (3) に関連して, これを, $mv \sin \alpha \times OD$ と表せる。ただし $v \sin \alpha$ は粒子の速度の方位成分, OD は粒子の OB 軸からの距離である。これにより, (4) 式を使うことで, 以下を得る (※ Williams (2002) 中, (16) (17) 式において ϕ^2 とあるが, ϕ の誤りである)。

$$\sin \alpha \cos \theta = \frac{\sin \alpha \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} = \text{const.} \quad (16)$$

この測地線の赤道 ($\theta = \phi = 0$) における方位角を α_0 とすると,

$$\sin \alpha \cos \theta = \frac{\sin \alpha \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} = \sin \alpha_0 \quad (17)$$

となる。この式は更成緯度 θ を用いた最も単純な式の形である。そして, 測地線の計算は一般に (θ, L) を用いて行われ, 必要に応じて (2) 式を用いることで, 測地緯度に変換することとなる。

実際に, 回転楕円体の測地線上の方位角 α と更成緯度 θ の関係は, 対応する球体の大円 (Fig. 4) (※ここでは auxiliary sphere : 補助球と呼ぶ) における測地線での関係と, 共通の値 α_0 を介して一致する (※球体での測地線条件は付録 1 に追記した)。しかしながら, 距離と経度差の式は $O(e^2)$ のオーダーで異なる。大円の距離と経度差の式は, 回転楕円体のそれらを求める際に, 繰返し法や摂動法の一次近似として用いられる。

(1) 測地線長

本項では Williams (2002) に従い, 回転楕円体上に補助球概念を導入することで, 測地線の距離を算出するための微分方程式を述べる。

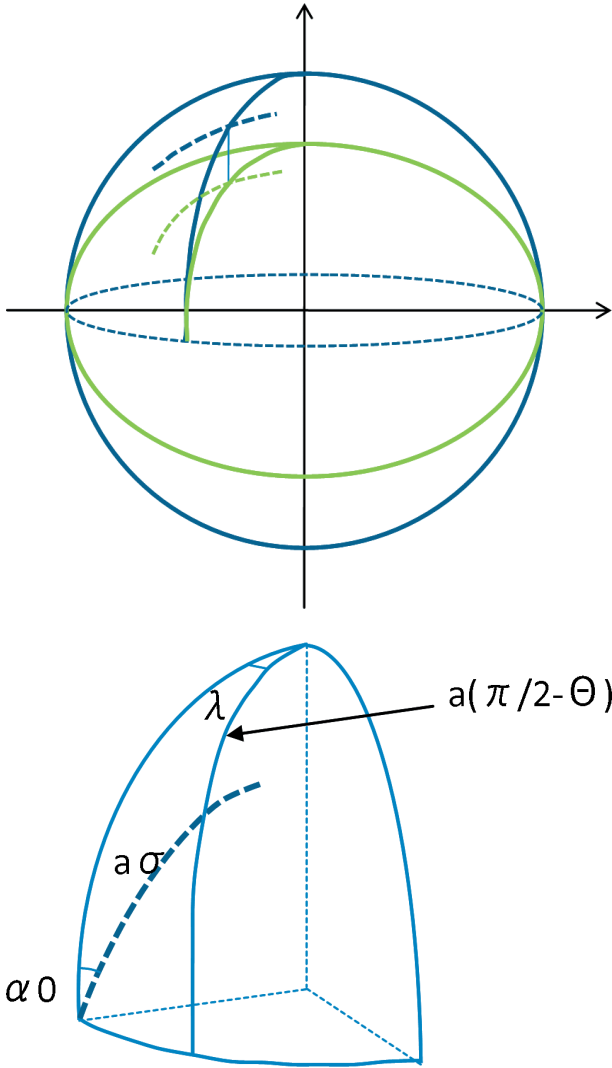


Fig. 4 The spheroidal earth (green) and its auxiliary sphere (blue) and enlarged view of auxiliary sphere.

Fig. 3 及び式 (17) より, $\cos \alpha$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} \frac{d\theta}{ds} \\ &= \pm \frac{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha_0}}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (18)$$

とかける。ただし, 符号は $\cos \alpha$ に一致する。

よって, 回転楕円体上の測地線について, 赤道からある点まで測地線に沿った距離を s_g で表すとすると,

$$\frac{ds_g}{d\theta} = \pm a \frac{\cos \theta \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha_0}}$$

$$\begin{aligned} &= \pm a \frac{\cos \theta \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{(1 - \sin^2 \theta) - (1 - \cos^2 \alpha_0)}} \\ &= \pm a \frac{\cos \theta \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\sqrt{\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \theta}} \end{aligned} \quad (19)$$

とかける。

ここで, 補助球上で赤道から大円までの弧長を $a\sigma$ とした時, 変数変換を $\sin \theta = \sin \sigma \cos \alpha_0$ とする (※ Fig. 4 参照, 付録 1 で σ の定義を説明する)。

また, $u^2 \equiv \frac{e^2 \cos^2 \alpha_0}{1 - e^2}$ とすれば, 下記を得る (※付録 1 で展開を追記した)。

$$\frac{ds_g}{d\sigma} = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} = b \sqrt{1 + u^2 \sin^2 \sigma} \quad (20)$$

u^2 の級数で展開し, 項別に積分を行うことで我々は s_g を求めることが出来る (※付録 1 で展開を追記した)。

$$\begin{aligned} \frac{s_g}{b} &= \sigma \left(1 + \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{64} + \frac{5u^6}{256} - \frac{175u^8}{16384} + \dots \right) \\ &\quad - \sin 2\sigma \left(\frac{u^2}{8} \right) \left(1 - \frac{u^2}{4} + \frac{15u^4}{128} - \frac{35u^6}{512} + \dots \right) \\ &\quad - \sin 4\sigma \left(\frac{u^4}{256} \right) \left(1 - \frac{3u^2}{4} + \frac{35u^4}{64} - \dots \right) \\ &\quad - \sin 6\sigma \left(\frac{u^6}{3072} \right) \left(1 - \frac{5u^2}{4} \dots \right) \\ &\quad - \sin 8\sigma \left(\frac{5u^8}{131072} \right) (1 - \dots) - \dots \end{aligned} \quad (21)$$

測地線に沿った 2 点間の距離

$s_g(\sigma_2, \alpha_0) - s_g(\sigma_1, \alpha_0)$ は, 三角関数の和積公式

$$\sin(2n\sigma_2) - \sin(2n\sigma_1) = 2 \cos(2n\sigma_m) \sin n(\sigma_2 - \sigma_1)$$

ただし $\sigma_m \equiv (\sigma_2 + \sigma_1)/2$ を用いて, (21) 式の差を取ることで求められる。これは 2 つの点が非常に近接している場合, 桁落ちを避けることとなるため, 最も精密に求められる。

Vincenty (1975) はこの結果を計算により適した入れ子型の式になるよう調整を行った (※第 5 節で Vincenty (1975) については詳述するため, これ以上の記載は割愛する)。

(2) 経度差

本項では Williams (2002) に従い Vincenty (1975) の詳細を第5節で詳述する上で必要となる回転楕円体と補助球の経度差の概念を述べる。

再び, Fig. 3 より,

$$\tan \alpha = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta}} \frac{dL}{d\theta} \quad (22)$$

これに補助球上の大円の弧長 σ 及び測地線の条件式 (17) 式より下記を得る (※第5節に説明を追記した).

$$\frac{dL}{d\sigma} = \sin \alpha_0 \frac{\sqrt{1-e^2(1-\cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma)}}{(1-\cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma)} \quad (23)$$

楕円体の扁平率が極限まで小さくなった球, すなわち $e=0$ を考えた場合, $L=\lambda$ となる. ただし, λ は補助球上の大円の弧長 σ に対応する経度差であり, $\tan \lambda = \sin \alpha_0 \tan \sigma$ である (※第5節に説明を追記した).

(23) 式を e^2 の項で展開し, 項別に積分をすることで下記を得る (※第5節に説明を追記した).

$$L = \lambda - e^2 \sin \alpha_0 (J_0 \sigma + e^2 J_2 \sin 2\sigma + e^4 J_4 \sin 4\sigma + e^6 J_6 \sin 6\sigma + O(e^8)) \quad (24)$$

ただし,

$$\begin{aligned} J_0 &\equiv \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^2}{8} (2-\mu) + \frac{e^4}{64} (8-8\mu+3\mu^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{5e^6}{1024} (16-24\mu+18\mu^2-5\mu^3) \right) \\ J_2 &\equiv \frac{\mu}{32} \left(1 + \frac{e^2}{2} (2-\mu) + \frac{15e^4}{256} (16-16\mu+5\mu^2) \right) \\ J_4 &\equiv \frac{\mu^2}{512} \left(1 + \frac{15e^2}{16} (2-\mu) \right) \\ J_6 &\equiv \frac{5\mu^3}{24576} \\ \mu &\equiv \cos^2 \alpha_0 \end{aligned} \quad (25)$$

Vincenty (1975) は再びこの結果の式を調整し, 計算により適した入れ子の形式にした (※第5節で Vincenty (1975) については詳述するため, これ以上の記載は割愛する).

5 Vincenty (1975) による距離計算方法

ここでは, これまでの結果を元に Vincenty (1975) の内容を解説する. 測地学の第一問題 (ある地球上の一点に対し, 指定の方位距離で進んだ測地線の終点を求めるもの) 及び第二問題 (地球上の二点に対し, それらを結ぶ測地線の方位距離を求めるもの) に分けて, 考察を進めることとしたい.

(1) 測地学の第一問題

まず, 与えられた地球上の一点の測地緯度 ϕ_1 を, 更成緯度を θ_1 , 経度を L_1 , 指定された方位を α_1 , 距離を s_g とする. 測地線上, 指定された方位距離を進んだ点の測地緯度 ϕ_2 , 更成緯度 θ_2 , 経度 L_2 を求めたい.

まず, Vincenty (1975) にある式を紹介する (※プログラミングにおける記述のように既知となる右辺により左辺を算出する形式で記載する. 下記 (V1) 等は Vincenty (1975) 中の式番号であり, Vnot は notation の意である).

$$\tan \sigma_1 = \tan \theta_1 / \cos \alpha_1 \quad (V1)$$

$$\sin \alpha_0 = \cos \theta_1 \sin \alpha_1 \quad (V2)$$

$$u^2 \equiv e^2 \frac{\cos^2 \alpha_0}{1-e^2} \quad (\text{Vnot})$$

$$A \equiv 1 + \frac{u^2}{16384} [4096 + u^2 \{-768 + u^2(320 - 175u^2)\}] \quad (V3)$$

$$B \equiv \frac{u^2}{1024} [256 + u^2 \{-128 + u^2(74 - 47u^2)\}] \quad (V4)$$

$$\sigma_m \equiv \sigma_1 + \sigma^{(n)}/2 \quad (V5)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma^{(n)}) &\equiv B \sin \sigma^{(n)} \left[\cos 2\sigma_m \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{4} \{\cos \sigma^{(n)} (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m) \right. \\ &\quad \left. - \frac{B}{6} \cos 2\sigma_m (-3 + 4 \sin^2 \sigma^{(n)}) (-3 + 4 \cos^2 2\sigma_m) \right] \end{aligned} \quad (V6)$$

$$\sigma^{(n+1)} = \frac{s_g}{bA} + \Delta(\sigma^{(n)}) \quad (\text{V } 7)$$

ただし、数列 $\sigma^{(n)}$ は、初項は s_g/bA として、(V5) ~ (V7) を、繰り返し $\sigma^{(n)}$ の値の変化が十分小になるまで行う。以降、 $\sigma^{(n)}$ が収束した値を σ と書く（※ $\sigma^{(n)}$ の値が十分一定になるとき、それは $\sigma_2 - \sigma_1$ にほぼ等しいものとなる）。

$$\tan \phi_2 = \frac{\sin \theta_1 \cos \sigma + \cos \theta_1 \sin \sigma \cos \alpha_1}{(1-f)} \times \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + (\sin \theta_1 \sin \sigma - \cos \theta_1 \cos \sigma \cos \alpha_1)^2}} \quad (\text{V } 8)$$

$$\tan \lambda = \frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos \theta_1 \cos \sigma - \sin \theta_1 \sin \sigma \cos \alpha_1} \quad (\text{V } 9)$$

$$C \equiv \frac{f}{16} \cos^2 \alpha_0 [4 + f(4 - 3 \cos^2 \alpha_0)] \quad (\text{V } 10)$$

$$L = \lambda - (1 - C)f \sin \alpha_0 \left[\sigma + C \sin \sigma \{ \cos 2\sigma_m + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m) \} \right] \quad (\text{V } 11)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_0}{-\sin \theta_1 \sin \sigma + \cos \theta_1 \cos \sigma \cos \alpha_1} \quad (\text{V } 12)$$

$$L_2 = L_1 + L$$

以上が Vincenty (1975) の結果である。

以下、各式の説明を行う。

(V1) 式関連

Fig. 5 に対し、球面三角法の余弦定理（※付録 1 の (16) (17) 式関連を参照）より、

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2) &= \cos \sigma_1 \cos(\pi/2 - \theta_1) \\ &+ \sin \sigma_1 \sin(\pi/2 - \theta_1) \cos(\pi - \alpha_1) \end{aligned}$$

$$0 = \cos \sigma_1 \sin \theta_1 - \sin \sigma_1 \cos \theta_1 \cos \alpha_1$$

より (V1) 式を得る。

(V2) 式関連

球面における測地線の条件であり、Vnot も上述の定義と同じである。

(V5) ~ (V7) 式関連

測地線上の 2 点について、赤道上からの距離の差 $s_g(\sigma_2, \alpha_0) - s_g(\sigma_1, \alpha_0)$ を取って b で割り、 A の定義及び三角関数の和積の公式を用いると、以下を得る（※楕円体上の 2 点が測地線で結ばれる場合、その測地線を赤道まで巻き戻すことを考える。ここでは、その赤道上の点における方位角を α_0 、2 点の σ の値をそれぞれ σ_1 、 σ_2 とした。また表記の簡便のため $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma$ と表記する）。

$$\begin{aligned} \frac{s_g(\sigma_2, \alpha_0) - s_g(\sigma_1, \alpha_0)}{b} &= \sigma(A(u) + O(u^{10})) \\ &+ \cos 2\sigma_m \sin \sigma \left(-\frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{16} - \frac{15u^6}{512} + \frac{35u^8}{2048} + O(u^{10}) \right) \\ &+ \cos 4\sigma_m \sin 2\sigma \left(-\frac{u^4}{128} - \frac{3u^6}{512} - \frac{35u^8}{8192} + O(u^{10}) \right) \\ &+ \cos 6\sigma_m \sin 3\sigma \left(-\frac{u^6}{1536} + \frac{5u^8}{6144} + O(u^{10}) \right) \\ &+ \cos 8\sigma_m \sin 4\sigma \left(-\frac{5u^8}{131072} + O(u^{10}) \right) \end{aligned}$$

また、 $\Delta\sigma$ はその定義から ((V6) 式参照)

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= B \sin \sigma \cos 2\sigma_m + \frac{B^2}{4} \sin \sigma \{ \cos \sigma \cos 4\sigma_m \\ &- \frac{B}{6} (-3 + 4 \sin^2 \sigma) \cos 6\sigma_m \} \end{aligned}$$

$$= B \sin \sigma \cos 2\sigma_m + \frac{B^2}{8} \sin 2\sigma \cos 4\sigma_m$$

$$- \frac{B^3}{24} (-\sin 3\sigma) \cos 6\sigma_m$$

とかける。

よって上の式の結果とあわせれば、

$$\begin{aligned} \frac{s_g(\sigma_2, \alpha_0) - s_g(\sigma_1, \alpha_0)}{bA} + \Delta\sigma &= \sigma(1 + O(u^{10})) \\ &+ \cos 2\sigma_m \sin \sigma \left(B + \frac{1}{A} \left(-\frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{16} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{15u^6}{512} + \frac{35u^8}{2048} + O(u^{10}) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos 4\sigma_m \sin 2\sigma \left(\frac{B^2}{8} + \frac{1}{A} \left(-\frac{u^4}{128} - \frac{3u^6}{512} \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \frac{35u^8}{8192} + O(u^{10}) \right) \right) \\
 & + \cos 6\sigma_m \sin 3\sigma \left(\frac{B^3}{24} + \frac{1}{A} \left(-\frac{u^6}{1536} \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{5u^8}{6144} + O(u^{10}) \right) \right) \\
 & + \cos 8\sigma_m \sin 4\sigma \left(\frac{1}{A} \left(-\frac{5u^8}{131072} + O(u^{10}) \right) \right)
 \end{aligned}$$

となるが、実際 A, B の定義より、

$$AB = \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} + \frac{15u^6}{512} - \frac{35u^8}{2048} + O(u^{10})$$

$$\frac{AB^2}{8} = \frac{u^4}{128} + \frac{3u^6}{512} + \frac{34u^8}{8192} + O(u^{10})$$

$$\frac{AB^3}{24} = \frac{u^6}{1536} - \frac{5u^8}{6144} + O(u^{10})$$

となるため、先ほどの式の右辺の多くが打ち消しあうこととなり、右辺には $O(u^{10})$ 以外の項としては、 $\frac{1-u^8}{A \cdot 8192}$ 、 $\frac{1-5u^8}{A \cdot 131072}$ に \sin, \cos が乗せられたものが残ることとなる。

よって、 $\sigma^{(n)}$ の値の変化がほぼない状態となった際には、(V7) 式がほぼ $O(u^{10})$ 程度の精度で成立する。これは $u^{10} \cong 10^{-11}$ であることから、角度にして 10^{-11} rad、距離にして 0.1 mm 以上の精度となることがわかる。

(V5) ~ (V7) 式を繰り返すことで $\sigma^{(n)}$ が一定の値に収束することを、以下で説明する。

まず、 $\sigma^{(n)}$ がある値 β に収束した際には、下記の式が成立する。

$$E(\beta) \equiv \frac{S_g}{bA} + F(\beta) - \beta = 0$$

ただし、 $\Delta\sigma = F(\sigma)$ と表記した。

また、 $\sigma^{(n)}$ の定義から

$$\sigma^{(n+1)} = \frac{S_g}{bA} + F(\sigma^{(n)}) \text{ である。}$$

$B \cong \pm 1.6 \times 10^{-3} \times \cos^2 \alpha_0$ と小さいこと、及び $F(\sigma)$ が三角関数の積であることから $F(\sigma)$ の σ での微分は、 1.6×10^{-3} 以下となる。よって、 $E(\sigma)$

を σ で微分すると負 ($E'(\sigma) \cong -1 \pm 1.6 \times 10^{-3}$) となる。

$\sigma^{(n)}$ は初め $\sigma^{(0)} = \frac{S_g}{bA} > 0$ としているが、 $E(0) = \frac{S_g}{bA}$ 及び $E(\sigma)$ の微分の大きさより $\sigma^{(0)} = \frac{S_g}{bA}$ の至近に、目標とする β が存在することがわかる。

また $F(\sigma)$ の主要な項を取り上げると $F(\sigma) \cong B \sin \sigma \cos 2\sigma_m$ より $F(\sigma) < B < 1.6 \times 10^{-3}$ となる。

ここで任意の整数 n について、 $|\sigma^{(n)} - \beta| < \frac{2}{3}$ となることを数学的帰納法で確認する。

まず $n = 0$ については、

$$E(\beta) = 0 = \frac{S_g}{bA} + F(\beta) - \beta = \sigma^{(0)} + F(\beta) - \beta \text{ より}$$

$$|\sigma^{(0)} - \beta| = |F(\beta)| < \frac{2}{3} \text{ より明らかである。}$$

次に $n = k$ で成立を仮定したとき、 $E(\sigma)$ の β の周りでのテイラー展開により

$$\begin{aligned}
 |\sigma^{(k+1)} - \beta| &= |E(\sigma^{(k)}) + \sigma^{(k)} - \beta| = \\
 & \left| E(\beta) + E'(\beta)(\sigma^{(k)} - \beta) + \frac{E''(\beta)}{2!}(\sigma^{(k)} - \beta)^2 + \dots \right. \\
 & \left. + (\sigma^{(k)} - \beta) \right|
 \end{aligned}$$

$$\cong \left| \pm 1.6 \times 10^{-3} (\sigma^{(k)} - \beta) + \frac{E''(\beta)}{2!} (\sigma^{(k)} - \beta)^2 + \dots \right|$$

$$< \frac{1.6}{10^3} \left[|\sigma^{(k)} - \beta| + \frac{|\sigma^{(k)} - \beta|^2}{2!} + \frac{|\sigma^{(k)} - \beta|^3}{3!} \dots \right]$$

$$< \frac{1.6}{10^3} \left[|\sigma^{(k)} - \beta| + \frac{|\sigma^{(k)} - \beta|^2}{2^1} + \frac{|\sigma^{(k)} - \beta|^3}{2^2} \dots \right]$$

ここで仮定より $|\sigma^{(k)} - \beta| < \frac{2}{3} < 1$ より

$$|\sigma^{(k+1)} - \beta|$$

$$< \frac{1.6}{10^3} \left[1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots \right] = \frac{1.6}{10^3} \frac{1}{1-1/2} < \frac{2}{3}$$

が成立する。よって任意の整数 n について、 $|\sigma^{(n)} - \beta| < \frac{2}{3}$ となる。

このことから $1 - \frac{1}{2} |\sigma^{(n)} - \beta| > \frac{2}{3}$ となる。

次に上記の式から $\frac{1}{2} |\sigma^{(n)} - \beta| < 1$ より、 $\frac{1}{2} |\sigma^{(n)} - \beta|$ を公比とする等比級数が収束するこ

とに注意すると,

$$\begin{aligned} & |\sigma^{(k+1)} - \beta| \\ & < \frac{1.6}{10^3} \left[|\sigma^{(k)} - \beta| + \frac{|\sigma^{(k)} - \beta|^2}{2^1} + \frac{|\sigma^{(k)} - \beta|^3}{2^2} \dots \right] \\ & = \frac{1.6}{10^3} \frac{|\sigma^{(k)} - \beta|}{1 - \frac{1}{2} |\sigma^{(k)} - \beta|} < \frac{1.6}{10^3} \frac{|\sigma^{(k)} - \beta|}{\frac{2}{3}} \\ & < \frac{2.4}{10^3} |\sigma^{(k)} - \beta| \end{aligned}$$

が任意の整数 k について成立する.

これを繰り返せば

$$|\sigma^{(k+1)} - \beta| < \left(\frac{2.4}{10^3}\right)^k |\sigma^{(0)} - \beta| < \left(\frac{2.4}{10^3}\right)^k$$

よって $\sigma^{(k)}$ は $k \rightarrow \infty$ で β に収束する.

以上は傾きを -1 で近似した Newton 法と思っても良い.

これで指定された方位距離を進んだ点の測地緯度 ϕ_2 , 更成緯度 θ_2 , 経度 L_2 を求める準備が整った.

再び (22) 式以降の説明がそれらを求めるのに適しているため, 以下ではその説明を述べることにする.

(22), (23) 式関連

(22) 式は Fig. 3 より自明である. σ の定義 $\sin \theta = \sin \sigma \cos \alpha_0$ より,

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \sigma \cos^2 \alpha_0}$$

また, σ の定義式の両辺を微分すると,

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{\cos \alpha_0 \cos \sigma}{\sqrt{1 - \sin^2 \sigma \cos^2 \alpha_0}}$$

よって, (7) 式の $\frac{dL}{d\theta}$ の変換式を用いれば,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\sigma} &= \frac{dL}{d\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}{\cos \theta} \tan \alpha \frac{d\theta}{d\sigma} \\ &= \frac{\sqrt{1 - e^2 (1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma)}}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma}} \tan \alpha \frac{\cos \alpha_0 \cos \sigma}{\sqrt{1 - \sin^2 \sigma \cos^2 \alpha_0}} \end{aligned}$$

となる.

ここで, 後半の部分を簡便にすると, $\sin \alpha \cos \theta = \sin \alpha_0$ 及び σ の定義式を用いて

$$\begin{aligned} \tan \alpha \cos \alpha_0 \cos \sigma &= \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \sigma}{\cos \theta \cos \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \sigma}{\cos \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \sigma \cos^2 \alpha_0}} \end{aligned}$$

さらに簡便にするために, 上と同じく $\sin \alpha \cos \theta = \sin \alpha_0$ 及び σ の定義式を用いて

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos^2 \theta}} = \frac{\cos \alpha_0 \cos \sigma}{\sqrt{1 - \sin^2 \sigma \cos^2 \alpha_0}}$$

が成立する.

よって,

$$\frac{dL}{d\sigma} = \frac{\sqrt{1 - e^2 (1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma)}}{1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma} \sin \alpha_0$$

となり, (23) 式を得る.

次に, $\tan \lambda = \sin \alpha_0 \tan \sigma$ を示す.

補助球において, 回転楕円体から補助球に移した点の緯度を θ とし, その点と補助球上の大円を赤道上まで巻き戻した点との経度差と弧長差をそれぞれ λ, σ とする. α_0 をその赤道上の点の方位とする.

補助球上の三角形に対して, 正弦定理と余弦定理よりそれぞれ,

$$\frac{\sin \sigma}{\sin \lambda} = \frac{\sin(\pi/2 - \theta)}{\sin \alpha_0}$$

$$\cos \sigma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos \frac{\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin \frac{\pi}{2} \cos \lambda$$

となり, よって与式を得る.

(24), (25) 式関連

今 p, q を定数としたとき, 下記の関数を $x = 0$ でマクローリン展開を行うと,

$$q \frac{\sqrt{1 - x^2 p}}{p} = \frac{q}{p} - \frac{q x^2}{2} - \frac{q p x^4}{8} - \frac{q p^2 x^6}{16} + O(x^8)$$

であるから, 同様に e を変数として, また $\mu = \cos^2 \alpha_0$ とすると, (23) 式は

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\sigma} &= \sin \alpha_0 \frac{\sqrt{1 - e^2 (1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma)}}{1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma} \\ &= \frac{\sin \alpha_0}{1 - \mu \sin^2 \sigma} - e^2 \sin \alpha_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} (1 - \mu \sin^2 \sigma) \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{e^4}{16}(1-\mu \sin^2 \sigma)^2+\frac{5e^6}{128}(1-\mu \sin^2 \sigma)^3+\dots)$$

となる．ここで $\sin^2 \sigma$, $\sin^4 \sigma$, $\sin^6 \sigma$ の項を，三角関数の倍角定理を繰り返すことで $\cos 2\sigma$, $\cos 4\sigma$, $\cos 6\sigma$ の項で表すようにすれば，

(25) 式の $J_2 \sim J_6$ の定義とあわせて，

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin \alpha_0}{1-\mu \sin^2 \sigma} - e^2 \sin \alpha_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{16} + \frac{5e^6}{128} \right) \\ &+ \mu \left(\frac{-e^2}{16} + \frac{-e^4}{16} + \frac{-15e^6}{256} \right) + \\ &\mu \cos 2\sigma \left(\frac{e^2}{16} + \frac{e^4}{16} + \frac{15e^6}{256} \right) + \mu^2 \left(\frac{3e^4}{128} + \frac{45e^6}{1024} \right) \\ &+ \mu^2 \cos 2\sigma \left(\frac{-e^4}{32} + \frac{-15e^6}{256} \right) \\ &+ \mu^2 \cos 4\sigma \left(\frac{e^4}{128} + \frac{15e^6}{1024} \right) + \mu^3 \left(\frac{-50e^6}{4096} \right) \\ &+ \mu^3 \cos 2\sigma \left(\frac{75e^6}{4096} \right) + \mu^3 \cos 4\sigma \left(\frac{-30e^6}{4096} \right) \\ &+ \mu^3 \cos 6\sigma \left(\frac{5e^6}{4096} \right) + O(e^8) \\ &= \frac{\sin \alpha_0}{1-\mu \sin^2 \sigma} - e^2 \sin \alpha_0 \left(J_0 + 2e^2 J_2 \cos 2\sigma \right. \\ &\quad \left. + 4e^4 J_4 \cos 4\sigma + 6e^6 J_6 \cos 6\sigma + O(e^8) \right) \end{aligned}$$

とかける．

これらを σ で積分すると (24) 式に一致することがわかる．ただし，初項については， $\tan \lambda = \sin \alpha_0 \tan \sigma$ の両辺を σ で微分することで，

$$\frac{1}{\cos^2 \lambda} \frac{d\lambda}{d\sigma} = \sin \alpha_0 \frac{1}{\cos^2 \sigma}$$

また 2 乗することにより

$$\frac{1}{\cos^2 \lambda} - 1 = \sin^2 \alpha_0 \frac{\sin^2 \sigma}{\cos^2 \sigma}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \lambda} = \frac{\sin^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma + (1 - \sin^2 \sigma)}{\cos^2 \sigma}$$

$$= \frac{(\sin^2 \alpha_0 - 1) \sin^2 \sigma + 1}{\cos^2 \sigma} = \frac{-\cos^2 \alpha_0 \sin^2 \sigma + 1}{\cos^2 \sigma}$$

$$\therefore \frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin \alpha_0}{1 - \mu \sin^2 \sigma}$$

となる．よって，初項を σ で積分すると λ とな

ることに注意する．

(V 10), (V 11) 式関連

測地学の第一問題に戻り，始点と終点について (24) 式の差をとると，以下のように表される (※以下は， $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma$, $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda$ としている．また $\sin 2n\sigma_2 - \sin 2n\sigma_1 = 2 \cos 2n\sigma_m \sin n(\sigma_2 - \sigma_1)$ を用いている．Fig. 5 を参照)．

$$\begin{aligned} L_2 - L_1 &= \lambda - e^2 \sin \alpha_0 \left(J_0 \sigma + \right. \\ &\quad \left. 2e^2 J_2 \cos 2\sigma_m \sin \sigma + 2e^4 J_4 \cos 4\sigma_m \sin 2\sigma + \right. \\ &\quad \left. 2e^6 J_6 \cos 6\sigma_m \sin 3\sigma + O(e^8) \right) \end{aligned}$$

また，(V 10) 式より

$C \equiv f\mu/4 + f^2\mu/4 - 3f^2\mu^2/16$ 及び $e^2 = f(2-f)$ から，

$$e^2 J_0 = f - \frac{f^2\mu}{4} - \frac{f^3\mu}{4} + \frac{3f^3\mu^2}{16} + O(f^4)$$

$$= (1-C)f + O(f^4)$$

同じく

$$2e^4 J_2 = \frac{f^2\mu}{4} + \frac{f^3\mu}{4} - \frac{f^3\mu^2}{4} + O(f^4)$$

$$= (1-C)fC + O(f^4)$$

$$4e^6 J_4 = \frac{f^3\mu^2}{16} + O(f^4) = (1-C)fC^2 + O(f^4)$$

が成立することに注意すると，上記の (24) 式の差をとったものは

$$\begin{aligned} L &= \lambda - (1-C)f \sin \alpha_0 (\sigma + C \cos 2\sigma_m \sin \sigma \\ &\quad - C^2 \cos \sigma \sin \sigma + 2C^2 \cos^2 2\sigma_m \cos \sigma \sin \sigma) \\ &\quad + O(f^4) \end{aligned}$$

と表される．よって $O(f^4)$ の精度で (V 11) 式が得られた． $f^4 \cong 1.26 \times 10^{-10}$ より，角度 rad がこの精度で決定されると，楕円体の長半径が $a \cong 6.38 \times 10^6$ であることから，対応する距離は概ね $8 \times 10^{-4} \text{m} \cong 0.8 \text{mm}$ の精度で決定されることになる．また，先ほどの $\sigma^{(n)}$ の精度 $O(u^{10})$ とあ

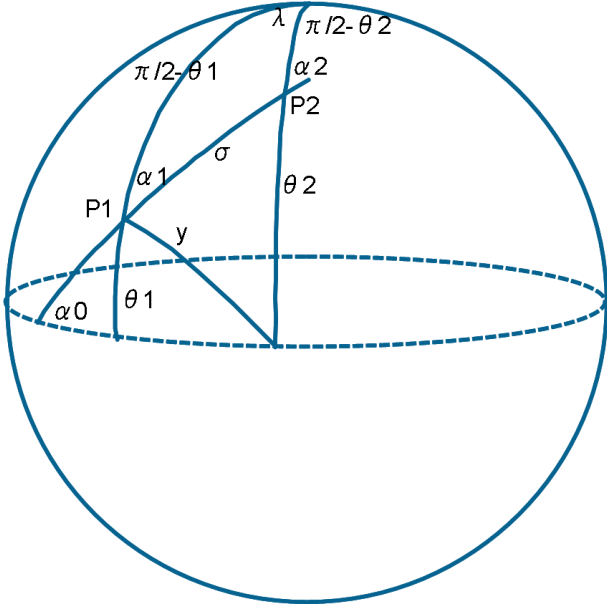


Fig. 5 Detail of a transferred geodesic on the auxiliary sphere ; P 1 : starting point, P 2 : end point.

わせ、角度の精度は 10^{-10} rad 程度であることが分かる。このため、プログラムの実装の際には $\sigma^{(n)}, \lambda^{(n)}$ の値の変化が 10^{-10} rad 以下になるまで計算を繰り返すこととなる。末尾のプログラミングに適した表記を参照されたい。

(V 9) 式関連

本文中の通り、測地線の始点、終点及び北極がなす補助球上の三角形 (Fig. 5) について、正弦定理及び余弦定理からそれぞれ、

$$\frac{\sin \sigma}{\sin \lambda} = \frac{\sin (\pi / 2 - \theta_2)}{\sin \alpha_1}$$

$$\begin{aligned} \cos \sigma &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) \\ &\quad + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) \cos \lambda \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \lambda = \frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos \theta_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\cos \sigma - \sin \theta_1 \sin \theta_2}$$

となるが、同じく余弦定理から

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \cos \sigma \\ &\quad + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \sin \sigma \cos \alpha_1 \end{aligned}$$

より $\sin \theta_2$ を消去して (V 9) 式を得る。

(V 12) 式関連

補助球上の三角形について、“終点と北極を結んだ大円が赤道と交わる点”と、始点を結んだ弧長の角度を仮に y とした場合、 y が関係する 2 つの隣接する三角形について、余弦定理をそれぞれ用いることで、

$$\cos y = \cos \theta_2 \cos \sigma + \sin \theta_2 \sin \sigma \cos \alpha_2$$

$$\cos y = \cos \theta_1 \cos \lambda + \sin \theta_1 \sin \lambda \cos (\pi / 2)$$

$$\therefore \cos \theta_1 \cos \lambda = \cos \theta_2 \cos \sigma + \sin \theta_2 \sin \sigma \cos \alpha_2$$

また、測地線の始点、終点及び北極がなす補助球上の三角形 (Fig. 5) について余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) &= \cos \sigma \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) \\ &\quad + \sin \sigma \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) \cos (\pi - \alpha_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) &= \cos \sigma \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \\ &\quad + \sin \sigma \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \cos \alpha_1 \end{aligned}$$

がそれぞれ成立する。

$$\tan \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_0}{\cos \theta_2 \cos \alpha_2}$$

にこれらを用いることで α_2, θ_2 を $\alpha_1, \theta_1, \sigma$ で表すことが可能となり、(V 12) 式を得る。

(V 8) 式関連

(2) 式より、

$$(1-f) \tan \phi_2 = \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2}$$

分子については、上述の通り、補助球上の北極と測地線の始点と終点がなす三角形について余弦定理から、

$$\sin \theta_2 = \cos \sigma \sin \theta_1 + \sin \sigma \cos \theta_1 \cos \alpha_1$$

が成立することから示される。

分母については、まず上記の (V 12) 式の経過

から

$$\cos \theta_2 \cos \alpha_2 = -\sin \theta_1 \sin \sigma + \cos \theta_1 \cos \sigma \cos \alpha_1$$

が成立する.

さらに, 測地線の条件式とあわせて

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + (\sin \theta_1 \sin \sigma - \cos \theta_1 \cos \sigma \cos \alpha_1)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha_2 \cos^2 \theta_2 + (\cos \theta_2 \cos \alpha_2)^2} = \cos \theta_2 \end{aligned}$$

から分母も成立し (V 8) 式が示された.

よって, 測地学の第一問題は解かれた.

(2) 測地学の第二問題

引き続き, 与えられた地球上の二点の測地緯度を ϕ_1, ϕ_2 , 更成緯度を θ_1, θ_2 , 経度を L_1, L_2 とした場合に, それらを結ぶ測地線の始点における方位 α_1 と二点間の距離 s_g を求める. 再び, Vincenty (1975) に戻り, 第二問題の各式を挙げる (*プログラミングにおける記述のように既知となる右辺により左辺を算出する形式で記載する).

$$\lambda^{(0)} = L \quad (\text{V } 13)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \sigma &= (\cos \theta_2 \sin \lambda)^2 + \\ & (\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda)^2 \quad (\text{V } 14) \end{aligned}$$

$$\cos \sigma = \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda \quad (\text{V } 15)$$

$$\tan \sigma = \sin \sigma / \cos \sigma \quad (\text{V } 16)$$

$$\sin \alpha_0 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \lambda / \sin \sigma \quad (\text{V } 17)$$

$$\cos 2\sigma_m = \cos \sigma - \frac{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos^2 \alpha_0} \quad (\text{V } 18)$$

ただし, λ は, (V 13) を第一近似として, (V 14) から (V 18), (V 10), (V 11) を値の変化が無視できるほど微小になるまで繰り返す. また $\Delta\sigma$ は (V 3), (V 4), (V 6) より求められるが, これにより,

$$s_g = bA (\sigma - \Delta\sigma) \quad (\text{V } 19)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\cos \theta_2 \sin \lambda}{\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda} \quad (\text{V } 20)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\cos \theta_1 \sin \lambda}{-\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \lambda} \quad (\text{V } 21)$$

以上が, Vincenty (1975) の結果であり, 以後これらの説明を行う.

まず, 始点, 終点及び北極が構成する補助球上の三角形 Fig. 5 において, 余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned} \cos \sigma &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \\ &+ \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \cos \lambda \end{aligned}$$

より, (V 15) 式を得る.

また, これを 2 乗して整理することで,

$$\begin{aligned} \sin^2 \sigma &= 1 - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \\ &- 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda \\ &- \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \lambda \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} & (\cos \theta_2 \sin \lambda)^2 + (\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda)^2 \\ &= \cos^2 \theta_2 \sin^2 \lambda + \sin^2 \theta_2 (1 - \sin^2 \theta_1) \\ &- 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda \\ &+ \cos^2 \theta_2 (\cos^2 \lambda - \cos^2 \theta_1 \cos^2 \lambda) \end{aligned}$$

より (V 14) 式を得る.

また, 同じ三角形において, 正弦定理及び測地線の条件式を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{\sin \sigma}{\sin \lambda} &= \frac{\sin (\pi/2 - \theta_2)}{\sin \alpha_1} \\ \sin \alpha_0 &= \sin \alpha_1 \cos \theta_1 = \frac{\cos \theta_2 \sin \lambda}{\sin \sigma} \cos \theta_1 \end{aligned}$$

よって (V 17) 式を得る.

また、差積の公式

$\cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$ 及び σ の定義式を用いて

$$\begin{aligned} \cos 2\sigma_m - \cos \sigma &= -2 \sin \sigma_1 \sin \sigma_2 \\ &= -2 \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \alpha_0 \cos \alpha_0} \end{aligned}$$

より (V18) 式を得る。

また、測地線の条件式及び (V17) 式を用いれば、

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_0}{\cos \theta_1} \frac{1}{\cos \alpha_1} = \frac{\cos \theta_2}{\sin \sigma} \frac{\sin \lambda}{\cos \alpha_1}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_0}{\cos \theta_2} \frac{1}{\cos \alpha_2} = \frac{\cos \theta_1}{\sin \sigma} \frac{\sin \lambda}{\cos \alpha_2}$$

となるが、上と同じ三角形において正弦定理を用いると、

$$\frac{\sin \sigma}{\sin \lambda} = \frac{\cos \theta_2}{\sin \alpha_1}$$

$$\frac{\sin \sigma}{\sin \lambda} = \frac{\cos \theta_1}{\sin \alpha_2}$$

が成立する。これらと (V14) 式を用いれば上記 $\tan \alpha_1, \tan \alpha_2$ を表す二式の分母はそれぞれ

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 \sin \sigma &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2 \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \sigma}} \sin \sigma \\ &= \sqrt{\sin^2 \sigma - \cos^2 \theta_2 \sin^2 \lambda} \\ &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda \\ \cos \alpha_2 \sin \sigma &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1 \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \sigma}} \sin \sigma \\ &= \sqrt{\sin^2 \sigma - \cos^2 \theta_1 \sin^2 \lambda} \\ &= \sqrt{\sin^2 \lambda (\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1) + (\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda)^2} \end{aligned}$$

とかける。さらに、 $\sin \lambda$ を $\cos \lambda$ で表すよう変形して

$= -\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \lambda$ であることから、(V20)、(V21) 式が成立する。

よって、測地学の第二問題は解かれた。

6 まとめ

本稿では、回転楕円体上の幾何学において、特に主要な役割を果たす測地線及び航程線について、説明を行った。上記で紹介した Vincenty (1975) による回転楕円体上の距離計算法は測地学の一つのスタンダードとして利用されている。実際、Web 上で同手法を実装したツールが U.S. National Geodetic Survey や Geoscience Australia 等の各国の公的機関のウェブサイトで見られる (参考文献等に URL を記載した)。

一方で、同手法は地球上の対蹠点に極めて近い二点等の極端な事例においては、収束に時間を要したり、誤った値が出たりすることが知られており、改良する手法が F. Karney (2012) で提唱されている。しかし、それらは一般的な状況では問題とならないこと及び回転楕円体上の幾何学の基礎的な事項からはじめ、広範な解説を行うことが本稿の目的であることから、ここでは一般に知られている Vincenty (1975) の公式について解説を行った。より専門的な事項の理解には上記の F. Karney (2012)、Rapp (1993) 等を参照されたい。また、Vincenty (1975) の誤差は一般には mm 級以上の精度といわれている (Bomford, 1980, pp. 123)。本稿では第5節で述べた級数展開等から一般的な誤差を同様に見積もった。

Vincenty (1975) は一般の商用 GIS ソフトウェアにも実装されているようである。しかし、GIS ソフトウェアを使用する際に、距離計算の細部について利用者が意識することは少ないであろう。そもそも GIS ソフトウェアで用いられる「距離」が回転楕円体上の測地線に沿った距離なのか、また別の図法上の距離なのかは、はっきり明示されていないことも多い。そのため、場合によっては、利用者は本稿で述べたような知見をもとに慎重に判断を行うべきである。

当庁業務においても、管轄海域の画定等、楕円体上において中長距離の精密な距離計算が必要となることは多くあり、その技術的背景として本稿で述べた知見は有益であると考えている。

謝 辞

本稿を作成するにあたり、海洋情報課の皆様、仙石技術・国際課長、内閣官房総合海洋政策本部事務局の吉田参事官補佐をはじめ諸先輩方から様々なご助言をいただきました。厚く御礼申し上げます。

参考文献

Bomford, G. (1980) *Geodesy, 4th Edition*, Clarendon Press, Oxford.

辰野忠夫 (1989), 積分法による測地計算, *水路部研究報告*, 25, 165-179.

Williams, E. (2002) Navigation on the spheroidal earth. <http://williams.best.vwh.net/ellipsoid/ellipsoid.html>.

Vincenty, T. (1975) Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the ellipsoid with Application of Nested Equations. *Survey Review*, XXII, 176.

Rapp, H. (1993), Geometric Geodesy, Part II, 20-22. The Ohio State University, Ohio State University. <http://hdl.handle.net/1811/24409>.

野村正七 (1983), *地図投影法*, 財団法人日本地図センター, 東京.

Geodetic Calculations-Vincenty's Formulae, Geoscience Australia. http://www.ga.gov.au/geodesy/datum/vincenty_direct.jsp, http://www.ga.gov.au/geodesy/datum/vincenty_inverse.jsp.

INVERSE/FORWARD/INVERSE 3 D/FORWARD 3 D Computation Utilities, U. S. National Geodetic Survey, http://www.ngs.noaa.gov/TOOLS/Inv_Fwd/Inv_Fwd.html.

Karney, F. (2012) Algorithms for geodesics, *J. Geodesy*, DOI 10.1007/s 00190-012-0578-z.

要 旨

我が国では水路業務法や測量法の国内法において、地球の形状を回転楕円体として定義している。それゆえ、それらの法令に則って地点の位置や距離を精密に決定するためには、回転楕円体上の幾何学が必要となる。また、回転楕円体上の幾

何学は我が国と対向国との地理的中間線の算出等、排他的経済水域等の管轄海域を精密に画定するのに寄与することとなる。本稿では回転楕円体上の幾何学に関するいくつかの基本的概念、特に測地線や航程線を紹介する。また、T. Vincenty が 1975 年に提唱した測地線を計算する方法の詳細を記述する。

付録 1 各節の補筆・修正

付録 1 では、特に (21) 式までの展開を追記し、また Williams (2002) における誤りを修正する。

(2) 式関連

Fig. 2 から、 θ が微小な $d\theta$ 変化した時、 $z = b \sin \theta$ は、 $dz/d\theta = b \cos \theta$ より、 $dz = b \cos \theta d\theta$ となる。

同じく、点 P から赤道平面と平行に地軸に向かう方向の長さ $r = a \cos \theta$ は、 $dr = -a \sin \theta d\theta$ であるから、 $\tan \phi = dr/dz$ より与式を得る。

(3) 式関連

Fig. 2 から、

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + b^2 \cos^2 \theta d\theta^2} &= a \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta} d\theta \\ &= a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

となる。また、ここで (2) 式の両辺を 2 乗し、整理した上で、 θ と ϕ の正負の向きが等しいことから、

$$\cos \theta = \frac{\cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

また、(2) 式を ϕ で微分することで

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} = \frac{a}{b} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{d\phi}$$

$$d\theta = \frac{b}{a} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \phi} d\phi = \frac{b}{a} \frac{1}{1-e^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

よって先ほどの式に戻り、

$$a\sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

$$= a\sqrt{1-\frac{e^2 \cos^2 \phi}{1-e^2 \sin^2 \phi}} \left(\frac{b}{a} \frac{d\phi}{1-e^2 \sin^2 \phi} \right)$$

$$= b \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$$

また、 $b\sqrt{1-e^2} = a(1-e^2)$ が成立するので、

(3) 式を得る。

(6) 式関連

(5) 式の右辺第一項には、上記で求めた

$$\cos \theta = \frac{\cos \phi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}}$$

の関係式、また右辺第二項には、(3) 式を用いることで (6) 式を得る。

(7) 式関連

2 番目の等式について説明する。上記で求めた

$$\cos \theta = \frac{\cos \phi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}}$$

の関係式、また $d\theta$ と $d\phi$ の関係式を用いることで以下を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta}} \frac{dL}{d\theta} \\ &= \frac{\cos \phi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta}} \frac{d\phi}{d\theta} \frac{dL}{d\phi} \\ &= \frac{a}{b} \frac{\cos \phi \sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta}} \frac{dL}{d\phi} \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{b}{a} \sqrt{1-e^2 \cos^2 \theta} = \frac{1-e^2}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}}$$

を用いれば、(7) 式を得る。

(10) 式関連

(6) 式より、

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2 \left(\frac{\cos^2 \phi \tan^2 \alpha d\phi^2 (1-e^2)^2}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^3 \cos^2 \phi} + \frac{(1-e^2)^2 d\phi^2}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^3} \right) \\ &= a^2 \frac{(1-e^2)^2}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^3} \frac{d\phi^2}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

(16), (17) 式関連

Williams (2002) の原論文中、(16) (17) 式において ϕ^2 とあるのは ϕ の誤りである。測地線上のどの点でも方位角 α と更成緯度 θ には (16) 式があるので、赤道に適用して (17) 式を得る。

また、回転楕円体ではなく球体において、測地線 (すなわち大円) を考えたときに、(16) 式と同じ条件が成立することをみておく。まず、球面三角法の 2 定理を紹介する。

半径 r の球体上の三点を取り、それらを最短の弧 (大円) で結んだ球体上の三角形を考え、内角がそれぞれ A, B, C とし、その角に対応する対辺の弧長をそれぞれ ar, br, cr とする。このとき、球体上の余弦定理、正弦定理としてそれぞれ、

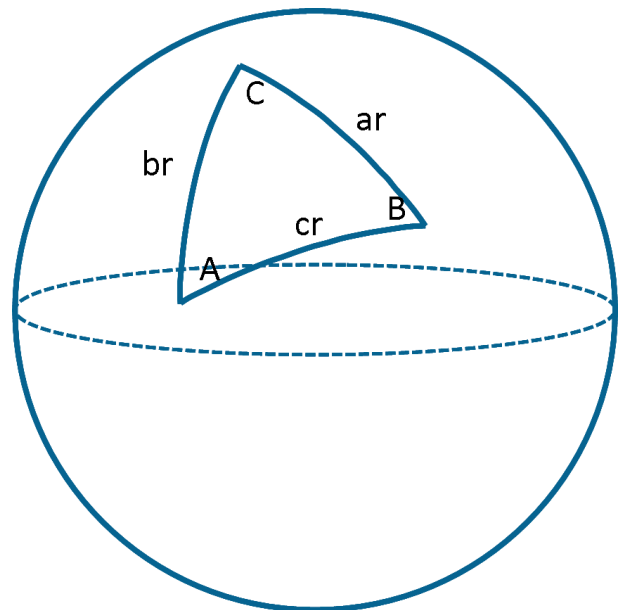


Fig. 6 A spherical triangle.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

が成立する (Fig. 6).

そのため、前述の球体上の赤道から赤道上の方位角 α_0 で進む大円上の点 $P(\theta, \alpha)$ について正弦定理から、

$$\frac{\sin(\pi/2 - \theta)}{\sin \alpha_0} = \frac{\sin(\pi/2)}{\sin(\pi - \alpha)}$$

よって、球体上の大円も回転楕円体と同様の条件式が成立することが分かる。ただし、これはあくまで方位角と緯度に関して成立するものであり、経度や距離については回転楕円体と球体で同じ関係があるわけではない。

σ の定義関連

ここでは σ の定義を説明する。

回転楕円体上で測地線の一点をとり、その点で方位角 α と更成緯度 θ であったとする。次にその点を補助球面上に z 軸に平行に $z > 0$ の方向へ移し、移動した点 (球体上の緯度は更成緯度の定義そのものであるから θ) から方位角 α の補助球体上の測地線 (大円) を再度引く (Fig. 4).

このとき、補助球体上でも $\sin \alpha \cos \theta = \sin \alpha_0$ が成立するので、補助球体の赤道上から、先ほど移動した点までの大円の長さを $a\sigma$ とする。

補助球体上に移動したこの点と球体上の北極点及び球体上の大円が赤道と交わる点の三点がなす三角弧に対して余弦定理を用いると、

$$\cos(\pi/2 - \theta) = \cos \sigma \cos \frac{\pi}{2} + \sin \sigma \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha_0$$

よって $\sin \theta = \sin \sigma \cos \alpha_0$ と定義式が得られる。

(20) 式関連

$\sin \theta = \sin \sigma \cos \alpha_0$ の両辺を θ で微分すると $\cos \theta = \cos \alpha_0 \cos \sigma \frac{d\sigma}{d\theta}$ なので、(19) 式とあわせて

$$\frac{ds_g}{d\sigma} = \pm \frac{a \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} \cos \alpha_0 \cos \sigma}{\sqrt{\cos^2 \alpha_0 - \sin^2 \theta} \cos \theta}$$

$$= \pm a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

を得る。

ここで σ が増えれば s_g も増えるものとするれば、符号は正となる。また、 $\sin \theta = \sin \sigma \cos \alpha_0$ と u の定義から、

$$\begin{aligned} a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} &= a \sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 \sigma} \frac{1 - e^2}{e^2} u^2 \\ &= b \sqrt{1 + u^2 \sin^2 \sigma} \end{aligned}$$

と (20) 式を得る。ここでは、積分を行って s_g を求めようとする際に、変数変換を繰り返すことで、積分をしやすい形に変換していることに注意する。

(21) 式関連

(20) 式の $\sin^2 \sigma$ を単なる変数 x と思い、 $x = 0$ の近くで Taylor 展開を行うと、

$$b \sqrt{1 + u^2 x} = b \left(1 + \frac{u^2 x^2}{2} - \frac{u^4 x^4}{8} + \frac{u^6 x^6}{16} - \frac{5u^8 x^8}{128} + \frac{7u^{10} x^{10}}{256} + \dots \right)$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{ds_g}{d\sigma} &= b \left(1 + \frac{u^2 \sin^2 \sigma}{2} - \frac{u^4 \sin^4 \sigma}{8} + \frac{u^6 \sin^6 \sigma}{16} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5u^8 \sin^8 \sigma}{128} + \frac{7u^{10} \sin^{10} \sigma}{256} + \dots \right) \end{aligned}$$

ここで、三角関数の次数を落とすために、下記の式を用いる。

$$\sin^2 \sigma = \frac{1 - \cos 2\sigma}{2}$$

$$\sin^4 \sigma = \frac{\cos 4\sigma - 4 \cos 2\sigma + 3}{8}$$

$$\sin^6 \sigma = \frac{-\cos 6\sigma + 6 \cos 4\sigma - 15 \cos 2\sigma + 10}{32}$$

$$\sin^8 \sigma = \frac{\cos 8\sigma - 8 \cos 6\sigma + 28 \cos 4\sigma}{128}$$

$$+ \frac{-56 \cos 2\sigma + 35}{128}$$

$$\sin^{10} \sigma = \frac{-\cos 10\sigma + 10 \cos 8\sigma - 45 \cos 6\sigma}{512} + \frac{120 \cos 4\sigma - 210 \cos 2\sigma + 126}{512}$$

先ほどの式にこれらを代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{ds_g}{d\sigma} \left(\frac{1}{b} \right) &= u^{10} \left(\frac{-7 \cos 10\sigma + 70 \cos 8\sigma +}{131072} \right. \\ &\quad \left. \frac{-315 \cos 6\sigma + 840 \cos 4\sigma - 1470 \cos 2\sigma + 882}{131072} \right) \\ &+ u^8 \left(\frac{-5 \cos 8\sigma + 40 \cos 6\sigma}{16384} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-140 \cos 4\sigma + 280 \cos 2\sigma - 175}{16384} \right) \\ &+ u^6 \frac{-\cos 6\sigma + 6 \cos 4\sigma - 15 \cos 2\sigma + 10}{512} \\ &+ u^4 \frac{-\cos 4\sigma + 4 \cos 2\sigma - 3}{64} \\ &+ u^2 \frac{1 - \cos 2\sigma}{4} + 1 \end{aligned}$$

三角関数の同類項でまとめると,

$$\begin{aligned} \frac{ds_g}{d\sigma} \left(\frac{1}{b} \right) &= \left(1 + \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{64} + \frac{5u^6}{256} \right. \\ &\quad \left. - \frac{175u^8}{16384} + \frac{441u^{10}}{65536} \right) \\ &+ \cos 2\sigma \left(\frac{u^2}{4} \right) \left(-1 + \frac{u^2}{4} - \frac{15u^4}{128} \right. \\ &\quad \left. + \frac{35u^6}{512} - \frac{735u^8}{16384} + \dots \right) \\ &+ \cos 4\sigma \left(\frac{u^4}{64} \right) \left(-1 + \frac{3u^2}{4} - \frac{35u^4}{64} + \frac{105u^6}{256} + \dots \right) \\ &+ \cos 6\sigma \left(\frac{u^6}{512} \right) \left(-1 + \frac{5u^2}{4} - \frac{315u^4}{256} + \dots \right) \\ &+ \cos 8\sigma \left(\frac{u^8}{16384} \right) \left(-5 + \frac{35u^2}{4} + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

今 b が定数で u も測地線上定数であることに注意して, σ で項別に積分すると (21) 式を得る.

$$\begin{aligned} \left(\frac{s_g}{b} \right) &= \sigma \left(1 + \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{64} + \frac{5u^6}{256} - \frac{175u^8}{16384} + \frac{441u^{10}}{65536} \right) \\ &- \sin 2\sigma \left(\frac{u^2}{8} \right) \left(1 - \frac{u^2}{4} + \frac{15u^4}{128} - \frac{35u^6}{512} + \frac{735u^8}{16384} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \sin 4\sigma \left(\frac{u^4}{256} \right) \left(1 - \frac{3u^2}{4} + \frac{35u^4}{64} - \frac{105u^6}{256} + \dots \right) \\ &- \sin 6\sigma \left(\frac{u^6}{3072} \right) \left(1 - \frac{5u^2}{4} + \frac{315u^4}{256} + \dots \right) \\ &- \sin 8\sigma \left(\frac{u^8}{131072} \right) \left(5 - \frac{35u^2}{4} + \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

付録 2 変分法による測地線の条件式の導入

変分法では, 一般に以下が成立する.

微分可能な関数 $f(x, y, z)$ に対して,

$$s = \int f(\phi, L(\phi), \frac{dL}{d\phi}(\phi)) d\phi$$

の形になっているとき, s を最小にする $L(\phi)$ の条件とは,

$$\frac{\partial f}{\partial L} - \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{L}} \right) = 0$$

である. ただし, $\dot{L} = \frac{dL}{d\phi}(\phi)$ と表記している (証明は一般の解析学の教科書に譲る).

今, (6) 式より

$$s = \int a \sqrt{\frac{(1-e^2)^2}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^3} + \frac{\cos^2 \phi}{1-e^2 \sin^2 \phi} \left(\frac{dL}{d\phi} \right)^2} d\phi$$

であるが, ϕ, L, \dot{L} はそれぞれ独立の変数としており, 上記には L 項はないため, $\frac{\partial f}{\partial L} = 0$ となる. $\frac{\partial f}{\partial \dot{L}}$ が ϕ によらず一定となるため, ある定数 K について

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{L}} = \frac{a \dot{L} \frac{\cos^2 \phi}{1-e^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{\frac{(1-e^2)^2}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^3} + \frac{\cos^2 \phi}{1-e^2 \sin^2 \phi} \left(\frac{dL}{d\phi} \right)^2}} = K$$

となる. ここで記号の短縮のため

$$R_\phi = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}, \quad r_\phi = \frac{a \cos \phi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}}$$

とかくと、上記の右式は、

$$\dot{L} = K \frac{R_\phi}{r_\rho \sqrt{r_\rho^2 - K^2}}$$

また、Fig.3 および (3) 式より、

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{a \cos \theta dL}{R_\phi d\phi} = \frac{a \cos \phi / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2} dL}{R_\phi d\phi} \\ &= \frac{r_\rho}{R_\phi} \dot{L} \end{aligned}$$

これらを二乗して $\sin \alpha$ の項に整理し、 K の式を合わせると、 $r_\rho^2 \sin^2 \alpha = K^2$ となる。

よって、 $r_\rho \sin \alpha = a \sin \alpha \cos \theta = K$ と測地線の条件式が導出される。

付録3 プログラミングに適した Vincenty (1975) の計算手法の表記

以下はプログラミングにおける記述のように既知となる右辺により左辺を算出する形式で記載する。

(測地学の第一問題)

所与の条件として、 $\phi_1, L_1, \alpha_1, s_g$ が与えられている。

$$\tan \theta_1 = (1-f) \tan \phi_1$$

$$\sigma_1 = \text{Arc tan}(\tan \theta_1 / \cos \alpha_1)$$

$$\theta_1 = \text{Arc tan}((1-f) \tan \phi_1)$$

$$\sin \alpha_0 = \cos \theta_1 \sin \alpha_1$$

$$u^2 \equiv e^2 (1 - \sin^2 \alpha_0) / (1 - e^2)$$

$$A \equiv 1 + \frac{u^2}{16384} [4096 + u^2 \{-768 + u^2 (320 - 175u^2)\}]$$

$$B \equiv \frac{u^2}{1024} [256 + u^2 \{-128 + u^2 (74 - 47u^2)\}]$$

ただし、数列 $\sigma^{(n)}$ は、初項は s_g/bA として、以下を繰り返し $\sigma^{(n)}$ の値の変化が十分小 (例えば 10^{-10} rad 以下) になるまで行う。

$$\sigma_m \equiv \sigma_1 + \sigma^{(n)}/2$$

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma^{(n)}) &\equiv B \sin \sigma^{(n)} \left[\cos 2\sigma_m \right. \\ &\quad + \frac{B}{4} \{\cos \sigma^{(n)} (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)\} \\ &\quad - \frac{B}{6} \cos 2\sigma_m (-3 + 4 \sin^2 \sigma^{(n)}) \\ &\quad \left. \times (-3 + 4 \cos^2 2\sigma_m) \right] \end{aligned}$$

$$\sigma^{(n+1)} = s_g/bA + \Delta(\sigma^{(n)})$$

以上を繰り返す。以降、 $\sigma^{(n)}$ が収束した値を σ と書く。その上で、

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \text{Arc tan} \left(\frac{\sin \theta_1 \cos \sigma + \cos \theta_1 \sin \sigma \cos \alpha_1}{(1-f)} \times \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + (\sin \theta_1 \sin \sigma - \cos \theta_1 \cos \sigma \cos \alpha_1)^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\lambda = \text{Arc tan} \left(\frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos \theta_1 \cos \sigma - \sin \theta_1 \sin \sigma \cos \alpha_1} \right)$$

$$C \equiv \frac{f}{16} \cos^2 \alpha_0 [4 + f(4 - 3 \cos^2 \alpha_0)]$$

$$\begin{aligned} L &= \lambda - (1-C)f \sin \alpha_0 [\sigma + C \sin \sigma \{\cos 2\sigma_m \\ &\quad + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m)\}] \end{aligned}$$

$$a_2 = \text{Arc tan} \left(\frac{\sin \alpha_0}{-\sin \theta_1 \sin \sigma + \cos \theta_1 \cos \sigma \cos \alpha_1} \right)$$

よって $\phi_2, L_2 = L_1 + L, a_2$ を得る。

(測地学の第二問題)

所与の条件として、 ϕ_1, L_1, ϕ_2, L_2 が与えられている。

$$L = L_2 - L_1$$

$$\tan \theta_1 = (1-f) \tan \phi_1$$

$$\tan \theta_2 = (1-f) \tan \phi_2$$

$$\lambda^{(0)} = L$$

ただし λ は、上記を第一近似として、以下を値の変化が無視できるほど微小（例えば 10^{-10} rad 以下）になるまで繰り返す。

$$\sin \sigma = \left\{ (\cos \theta_2 \sin \lambda^{(n)})^2 + (\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda^{(n)})^2 \right\}^{1/2}$$

$$\cos \sigma = \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda^{(n)}$$

$$\sigma = \text{Arc tan} (\sin \sigma / \cos \sigma)$$

$$\sin \alpha_0 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \lambda^{(n)} / \sin \sigma$$

$$\cos 2\sigma_m = \cos \sigma - \frac{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos^2 \alpha_0}$$

$$C \equiv \frac{f}{16} \cos^2 \alpha_0 [4 + f(4 - 3 \cos^2 \alpha_0)]$$

$$\lambda^{(n+1)} = L + (1 - C) f \sin \alpha_0 [\sigma + C \sin \sigma \{ \cos 2\sigma_m + C \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m) \}]$$

以上を繰り返し収束したとする。

その上で、

$$u^2 \equiv e^2 \cos^2 \alpha_0 / (1 - e^2)$$

$$A \equiv 1 + \frac{u^2}{16384} [4096 + u^2 \{-768 + u^2 (320 - 175u^2)\}]$$

$$B \equiv \frac{u^2}{1024} [256 + u^2 \{-128 + u^2 (74 - 47u^2)\}]$$

$$\Delta\sigma \equiv B \sin \sigma \left[\cos 2\sigma_m + \frac{B}{4} \left\{ \cos \sigma (-1 + 2 \cos^2 2\sigma_m) - \frac{B}{6} \cos 2\sigma_m (-3 + 4 \sin^2 \sigma) (-3 + 4 \cos^2 2\sigma_m) \right\} \right]$$

$$s_g = bA (\sigma - \Delta\sigma)$$

$$\alpha_1 = \text{Arc tan} \left(\frac{\cos \theta_2 \sin \lambda}{\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \lambda} \right)$$

$$\alpha_2 = \text{Arc tan} \left(\frac{\cos \theta_1 \sin \lambda}{-\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \lambda} \right)$$

よって s_g, α_1, α_2 を得る。

ただし、第二問題については対蹠点近くでは収束しなかったり、値が異なったりする可能性がある。

凡 例

a	回転楕円体の長軸の長さ
b	回転楕円体の短軸の長さ
θ	回転楕円体における更成緯度 (reduced latitude)
ϕ	回転楕円体における測地緯度 (geodetic latitude)
L	回転楕円体における経度
f	回転楕円体の扁平率
e	回転楕円体の離心率
R_ϕ	回転楕円体の子午線曲率半径
s	回転楕円体上の曲線の長さ
α	回転楕円体上の曲線の方位角
$M(\phi)$	赤道から測地緯度 ϕ までの子午線に沿った距離
s_R	回転楕円体上の航程線に沿った距離
s_g	回転楕円体上の測地線に沿った距離
α_0	回転楕円体上の測地線を赤道上まで延伸した際の赤道での方位角
μ	$\mu \equiv \cos^2 \alpha_0$
σ	回転楕円体上の測地線分を補助球上に移した大円を赤道と交わる点まで巻きもどし、その赤道上の点から大円の円弧の終点までの弧長角度。また、簡便のため、回転楕円体上の測地線上の2点について、この弧長角度を σ_1, σ_2 で表した際に、その差を $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ で表すこともある。
σ_m	上記の σ_1, σ_2 に対して、その中点 $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ を表す。
u	$u^2 \equiv e^2 \cos^2 \alpha_0 / (1 - e^2)$

λ 回転楕円体上の測地線分を補助球上に移した大円を赤道と交わる点まで巻きもどし、その赤道上の点から大円の円弧の終点までの補助球の経度差。また、簡便のため、回転楕円体上の測地線上の2点について、この経度差を λ_1, λ_2 で表した際に、その差を $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ で表すこともある。

r_p $r_p = \frac{a \cos \phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$ として、一般には卯酉線曲率半径と呼ぶ。