

流速データから多項式で仮定した流線関数を求める方法[†]

佐藤 敏*

Stream Function Arising from the Polynomial Fit to the Velocities[†]

Satoshi SATO*

Abstract

In order to visualize and grasp a velocity field in a horizontal plane, I try three ways in which stream function is obtained by fitting a polynomial to the measured velocities. The first way is the least square fitting a polynomial to the velocities, which is the same way as the one by Candela et al. (1990). The second is the least square fitting subject to the constraints. The last way is the fitting a polynomial to velocity components along the line of the acoustic beams provided by the horizontal acoustic Doppler current profiler.

1. はじめに

ADCPの船舶への普及や短波海洋データ、水平ドプラ式流況分布測定装置(日本水路協会, 1996)の開発により、面的な流れのデータが得ることが可能になり、水平面内の大量な流れのデータを可視化して把握することが必要となってきた。Foreman and Freeland(1991)はバンクーバー沖合いの船舶搭載のADCPデータについて潮汐モデルから推定される潮流を除去した後、流れが鉛直非発散であると仮定し、Candela et al. (1990)の方法を適用して、水平2次元の流線関数を最小二乗法により求めている。ノイズが含まれていると考えられるADCPデータも最小二乗法の適用が一種のフィルターになり、ノイズを小さくする効果をもたらすと考えられるので、このような手法を用いることは、面的データの的確な把握に役立つものと考えられる。

ここでは、まず、上記手法及びその方法により遠州灘でのADCP観測データから流線関数を求

めた結果について述べる。次に、それに条件を加えて流線関数を求める二つの方法を試みたので、その解法と結果について述べる。一番目は、制限条件付きの最小二乗法により流線関数を求める方法であり、その方法を伊勢湾の日平均流データへ適用した。二番目は、扇形の領域の視線方向の流速値のみが得られる場合の流線関数の求め方である。その方法は水平ドプラ式流況分布測定装置データに適用した。

2. 流線関数の求め方

Fig. 1に第四管区海上保安本部が1994年4月26日から5月9日までの14日間の観測によって得られた海面下10m層の流れのデータを示した(加藤ほか, 1996)。ADCPを搭載した船舶が海域に観測線を設けて航行することにより流れの空間分布を見ることができるようになった。このようなADCPのデータについて、Foreman and Freeland(1991)は流線関数 $\psi(x,y)$ を多項式で表わされるとの仮定のもとに最小二乗法を用いて求

[†] Received 1996 November 5th; accepted 1997 February 6th.

* 海上保安庁水路部海洋研究室 Ocean Research laboratory, Hydrographic Department, Maritime Safety Agency.

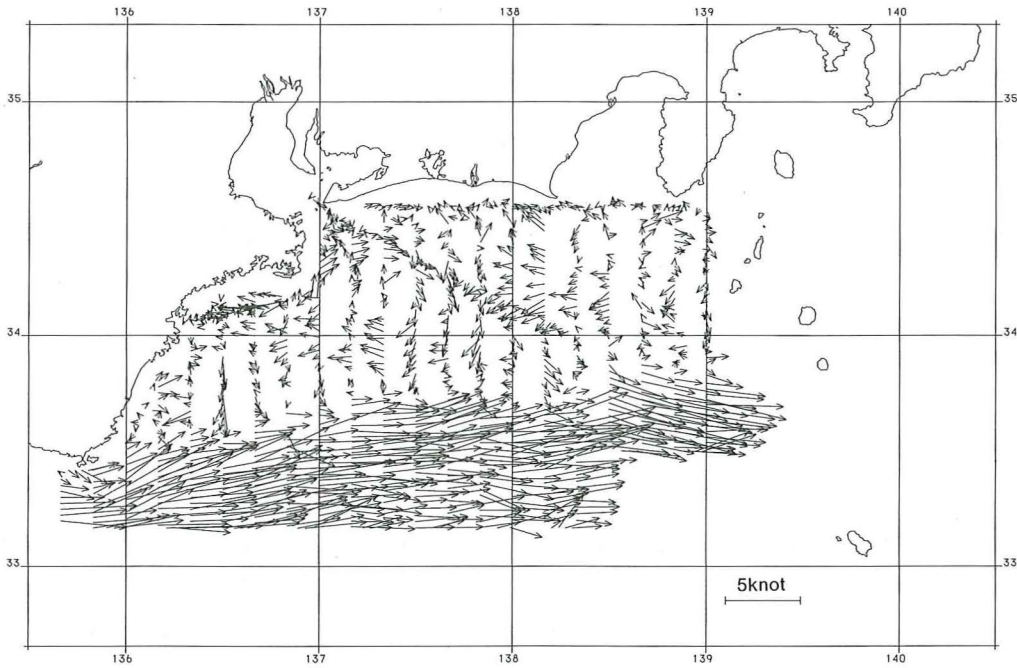


Fig. 1 ADCP velocities 10m below sea surface. Observations were carried out between April 26th and May 9th, 1994.

めている。その方法については、Candela et al. (1990)に述べられている。Candela et al. (1990)にはあたる事ができなかったが次のような方法で求められたと考えられる。

まず、流線関数 $\psi(x,y)$ が(1)式のように m 次の多項式で表わされるとする。

$$\psi(x,y) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^j \alpha_{jk} x^{j-k} y^k, \quad \ell = k + \frac{j(j+1)}{2} \quad (1)$$

α : 係数

流線関数 $\psi(x,y)$ と流れの x, y 成分の u, v とは、以下のような関係にあるので、

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

ADCP による流れの n 個の観測値の x, y 成分 U, V との誤差の二乗和

$$E(\alpha) = \sum_{i=1}^n \{ (u_i - U_i)^2 + (v_i - V_i)^2 \} \quad (3)$$

を最小にするように、(3)を係数ベクトル α で微分した下記の正規方程式より α を求める。

$$D\alpha = s \quad (4)$$

正規行列 D は $\frac{m(m+3)}{2} \times \frac{m(m+3)}{2}$ の正方行列

であり、その要素は、

$$d_{\ell_1 \ell_2} = \sum_{i=1}^n [k_1 k_2 x_i^{j_1+j_2} y_i^{k_1+k_2-2} + j_1 j_2 x_i^{j_1+j_2-2} y_i^{k_1+k_2}] \quad (5)$$

$$\ell_1 = k_1 + \frac{j_1(j_1+1)}{2}, \quad \ell_2 = k_2 + \frac{j_2(j_2+1)}{2}$$

また、 s は定数ベクトルであり、その要素は、

$$s_{\ell} = \sum_{i=1}^n [-k U_i x_i^{j_1} y_i^{k-1} + j V_i x_i^{j-1} y_i^k]$$

$$\ell = k + \frac{j(j+1)}{2} \quad (6)$$

となる。なお、(4)式では流線関数の定数項は決まらないが、流速値には定数項は関係ない。

Fig. 1 のデータに上記の方法を適用して求めた 7 次 ($m=7$) の流線関数を Fig. 2 に示す。この観測は 10 日以上にわたっており、その期間中に海流が変化している可能性もある。また、潮流等の短周期の流れの変動もデータに含まれていると考えられるが、それらの影響は小さいと想定して、データの修正は一切行わず、生データから流線関数を算出した。それでも、渥美半島沖では暖水域に対応して、閉じた流線が現われるなど、観測海域内の流線のパターンは観測当時の水温水平

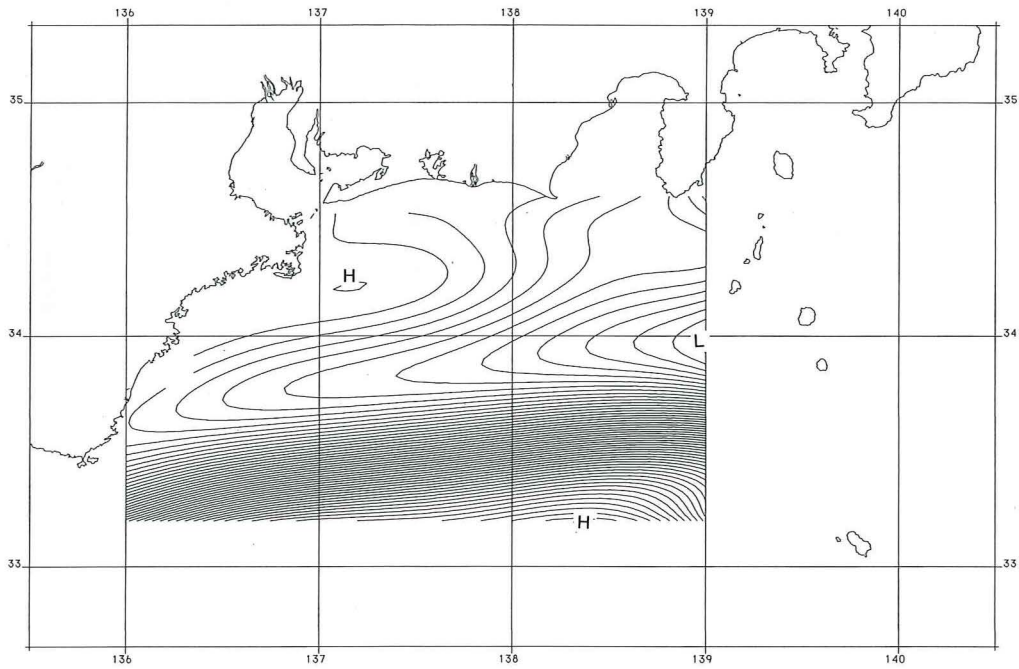


Fig. 2 Stream function arising from seventh-order polynomial fit to the velocities of Fig. 1. The contour increment is 2 km (m/sec).

分布とよく対応していることが示されている (加藤ほか, 1996).

3. 制限条件付き流線関数

Fig. 3には伊勢湾での潮流観測データの日平均流値を1.5'x1.5'のグリッドごとに平均した値 (佐藤, 1996)を示した. なお, 空白のグリッドはデータの無いグリッドであり, ◇で示されるグリッドは平均値が0.05knotに満たないグリッドである. Fig. 4はそのデータから前節の方法により求めた7次の流線関数である. これは伊勢湾の水平循環流の平均的な様子を示したものと考えられるが, 前節の方法では, 特に条件を与えずに最小二乗法で流線関数を求めているので, 図にあるように流線が海岸線を横切るようになる. これを解消するために, 海岸線上において指定したいくつかの点 (xs,ys)では流線関数の値が一定になるという条件(7式のもとで最小二乗法により求める方法を考えた.

$$\psi(x_s, y_s) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^i a_{jk} x_s^j y_s^k = \text{const.}$$

$$\ell = k + \frac{j(j+1)}{2} \quad (7)$$

海岸線上の p 個の点で(5)が成り立つとして, 行列で表わすと,

$$A\alpha = 0 \quad (8)$$

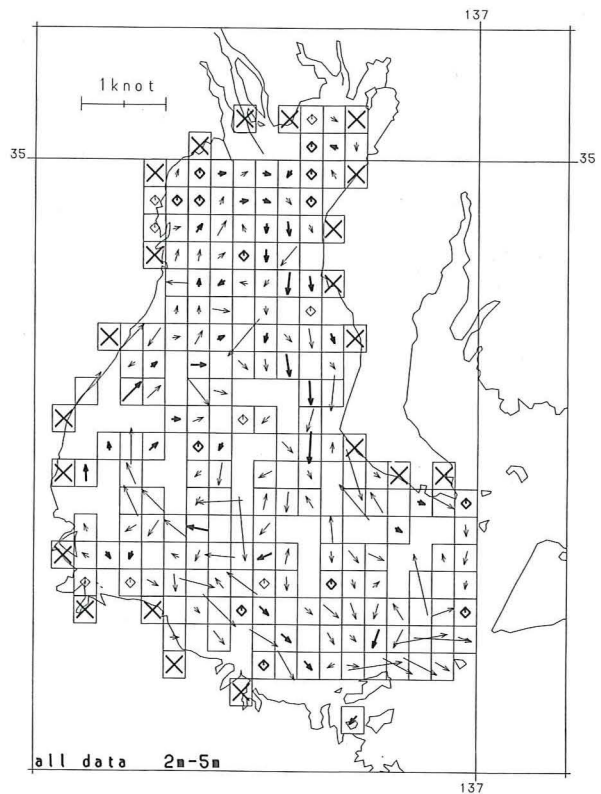


Fig. 3 Mean value of daily mean currents in 1.5'x1.5' grid.

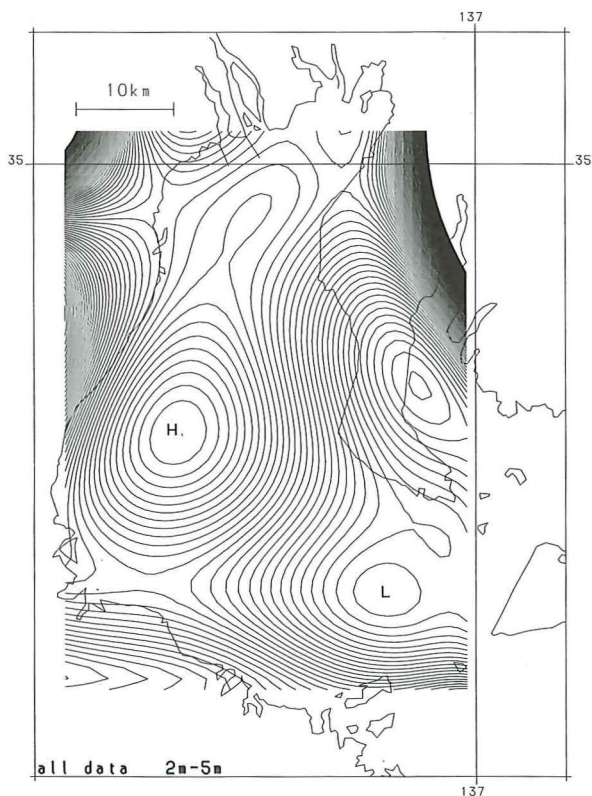


Fig.4 Stream function arising from seventh-order polynomial fit to the velocities of Fig. 2. The contour increment is 0.1(km · knot).

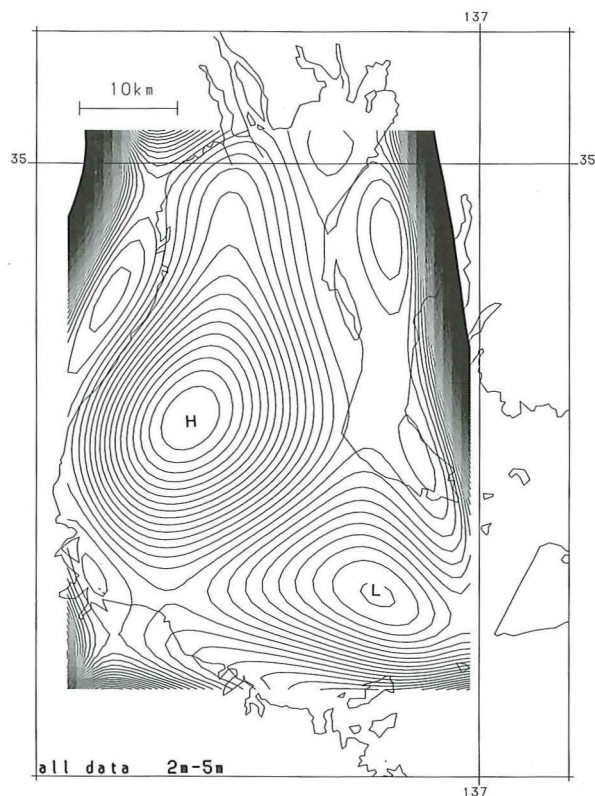


Fig.5 Stream function arising from seventh-order polynomial fit to the velocities of Fig. 2, subject to the constrain(7). The contour increment is 0.1(km · knot).

$A : p \times \frac{m(m+3)}{2}$ の行列

となる。ラグランジュの未定乗数 λ を用いて、(3)式を(8)式の条件のもとで最小にする。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [E - (A\alpha) * \lambda] = D\alpha - s - A * \lambda = 0 \quad (9)$$

(*) : 転置行列

(9)から、(8)の条件を使って λ を消去すると、 α が求まる。

$$\alpha = D^{-1}s - D^{-1}A * (AD^{-1}A*)^{-1}AD^{-1}s \quad (10)$$

()⁻¹ : 逆行列

Fig. 3 の×印で示す21点において値が一定値になるという制限条件(7)を課して、(10)により求めた流線関数を Fig. 5 に示す。Fig. 4 と比較すると、湾内の流線のパターンは似通っているが、海岸線を横切る流線がほぼ無くなっていることがわかる。

上では、海岸線を想定して、その海岸線上のいくつかの点において流線関数が一定値となる制限

条件を課しているが、それ以外の条件、たとえば、海域の特定の場所において流量を特定し、制限条件を課すようなことも可能である。その場合、(8)は、

$$A\alpha = b \neq 0 \quad (11)$$

となり、 α は次式で求められる。

$$\alpha = D^{-1}s - D^{-1}A * (AD^{-1}A*)^{-1}(b - AD^{-1})s \quad (12)$$

4. 視線方向の流速値のみがわかっている場合への適用

短波海洋レーダの場合、1台のレーダで得られる流れの情報、レーダから見て視線方向の流速値のみであるので、一般的には2台のレーダを設置して同じ海域の観測を実施するが、1台のレーダの視線方向の流速値のみから、観測海域の表面の流れが連続の式を満たすという仮定を用いて流れの直交する成分を求めるが試みられている

(Lipa and Barrick, 1983; 梅原ほか, 1991).

水平ドプラ式流況分布測定装置は音波ビームを水平に送波し、海中で反射して戻ってくる音波ビームのドプラ変化量により流れを計測する装置であり、短波海洋レーダと同様に1台の送受波器では、Fig. 6に示すように、扇形面内での10度間隔で送波される各音波ビームについての視線方向の流速値の情報だけが得られる。なお、データは1995年11月20日に関門海峡で計測されたものであり、扇形に広がる矢印の要にあたる岸壁の海面下5m層に送受波器を設置している。通常は、その10度方向の違う隣り合うビームにより測定される視線方向の流速値を合成することによって、流れのベクトル値を求めるが、その方法ではビーム間の角度が10度と小さいため、大きな誤差が生まれることもある(日本水路協会, 1996)ため、ベクトル値を推定する一方法として視線方向の流速値から流線関数を求める方法を考えた。

極座標系の場合、流速成分 V_r , V_θ と流線関数 ψ

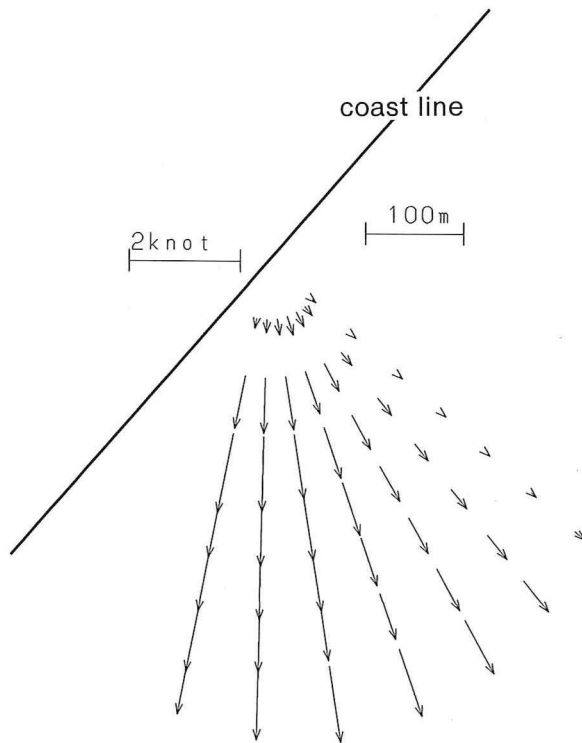


Fig. 6 The velocity components along its lines of acoustic beams provided by the horizontal acoustic Doppler current profiler at 09:56 on Nov. 20th, 1995.

とは以下の関係にある。

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (13)$$

座標の原点を水平ドプラ式流況分布測定装置の送受波器にとると、視線方向の流速成分は(9)式の V_r となるので、流線関数をこれまでと同様に(1)式であると仮定して、直交座標系の x , y と極座標系の r , θ との関係、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (14)$$

を用いれば、扇形面内での n 個の視線方向の流速の測定値 R と V_r との誤差の二乗和、

$$E_2(\alpha) = \sum_{i=1}^n (V_r - R_i)^2 \quad (15)$$

を最小にする係数ベクトル α を求めることができる。ただし、2次の x^2 と y^2 の項を θ で微分したものは、同じ(符号は逆)になるのでその係数を決定するためには他に条件が必要となる。ここでは、両者の係数の和は0となるという条件を用いた。

これは、

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16)$$

であるので、 $x^2 + y^2$ に比例する流線関数の値は原点を中心として回転する流れとなるため、これを無くする意味を持つ。

Fig. 6のデータから求めた3次の流線関数での流速を矢印で示すとFig. 7になる。Fig. 8は隣り合うビームの合成により算出された流れであるが、これと比べるとFig. 7の値は小さくなっているが、関門海峡でのこれまでの観測や知見からFig. 8の流速値のほうが現実に近いと考えられる。Fig. 7に示した流れが弱いことについては、流れの場にある収束や発散があることが原因である可能性もあるが、視線方向の流速成分だけで流線関数を求めることに無理があるのかもしれない。

5. おわりに

流線関数が多項式であると仮定して、海域に分布する流れのデータから求める方法を示した。この方法は、ノイズが含まれている流れのデータに対して、フィルターを通してノイズの影響を軽減しているものと考えられるので、流れの全体像を

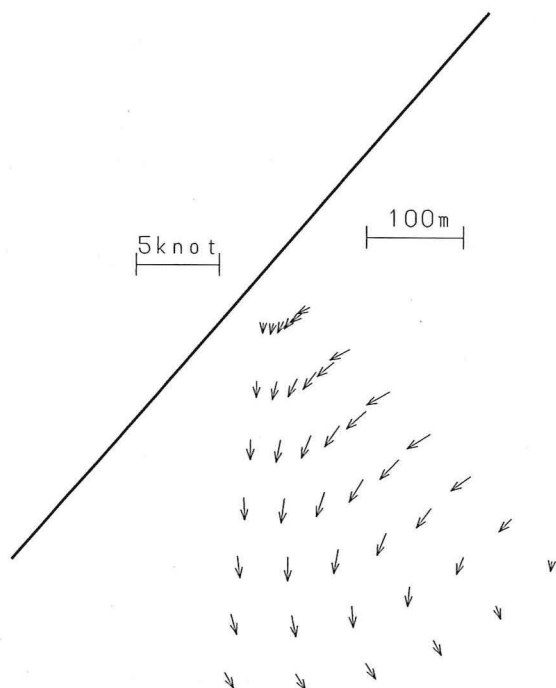


Fig. 7 The current vectors derived from the Stream function, which arises from third-order polynomial fit to the data of Fig. 6 .

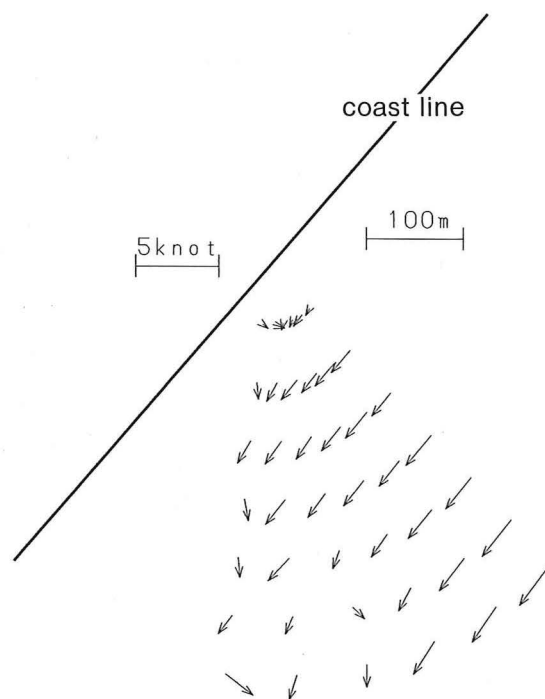


Fig. 8 The current vectors derived from the compositions of the two data next to each other of Fig. 6

把握するのに役立つものと考えられる。

しかしながら、仮定する多項式の次数により算出される流線関数も変わるが、今のところ、どのような次数にすれば良いかについては、客観的な基準はないので、流線関数の取扱いについては注意を要する。

参 考 文 献

Candela, J., R. C. Beardsley, and R. Limeburner : Removing Tides from Ship-Mounted ADCP Data, with Application to the Yellow Sea, in *Proceedings of the IEEE Third Working Conference on Current Measurement*, edited by G. F. Appell and T. B. Curtin, 258-266, (1990)

Foreman, M. G. G. and H. J. Freeland : A Comparison of Techniques for Tide Removal From Ship-Mounted Acoustic

Doppler Measurements Along the Southwest Coast of Vancouver Island, *J.G.R.*, **96**, c9, 17007-17021, (1991)

加藤弘紀, 和志武尚弥, 佐藤敏, 吉宣好 : 遠州灘～熊野灘の沿岸流 (I), *水路部技報*, **14**, 21-26, (1996)

Lipa, B. J. and D. E. Barrick : Least-Squares Methods for the Extraction of Surface Currents from CODAR Crossed-Loop Data : Application at ARLOSE, *IEEE J. Ocean Eng.*, **OE-8**, 4, 226-253, (1983)

日本水路協会 : 水平ドプラ式流況分布測定装置の研究開発, *調査研究資料*73, (1996)

佐藤敏 : 伊勢湾表層の循環流について, *沿岸海洋研究*, **33**, 2, 221-228, (1996)

梅原俊彦, 大野裕一, 井口俊夫 : 海洋レーダのデータ処理, *通信総合研究所季報*, **37**, 3, 383-391, (1991)