

## 積分法による測地計算†

辰野 忠夫\*

## COMPUTATION OF GEODESICS BY INTEGRAL METHOD†

Tadao Tatsuno\*

### Abstract

Many solutions have been submitted for the first and second problem of geodesy. Among them are the solutions by Legendre, Schreiber, Gauss and Helmert. Almost all of them employ the method of series expansion of Taylor or McLaurin.

In this report, another method is employed for solution of the problem of geodesy. It is the method of numerical integral by formula of Gauss. The formulae of numerical integral are directly reduced from the Euler's equation of the calculus of variations. Characteristic features of these two methods can be summarized as follows:

Features of the method of series expansion: Higher terms of the expansion must be omitted. The omission will cause an error in the computation of azimuth, distance and position coordinates, especially in the case of long distance. Much effort is needed for expanding the formula which is satisfactorily accurate for long distance. On the other hand, repeated computation is not necessary. In the days of manual calculation, this last item should have been a very good merit for practical surveyors.

Features of the method of numerical integral: There is no omission of computation as in the case of series expansion. Constants of the computation of the Gaussian numerical integral can be easily obtained to any accuracy. Repeated computation is terminated by comparing with a given small positive number. This number can be given to the program without any limit, so there is no cause of error in the termination of repeated computation.

Formulae of the computation are presented in eqs. (9), (10), (13) and (14) for longitude and distance. Results are presented in Table 5 and 6. The results are compared with the results of series expansion in Table 1, which is taken from the report of Dr. Shinzi.

### 序

測地学の第一問題、第二問題の解法については、ルジャンドル、シュライバー、ガウス等の種々の方法が与えられており、参考文献の「測地学序説」、「測地学の概観」、「現代測量学」等に示されている。また、進士氏の報告にはヘルメルトの方法も記されている。これらの方法は級数展開の方法によっているようである。

---

† Received 31th October 1988

\* 第六管区海上保安本部水路部 Hydro. Dept. 6th R.M.S.Hqs.

また、変分法のオイラーの方程式への直接の言及は少ないように見える。

本稿は、変分法のオイラーの方程式から直接にはじめて数値積分法により第一問題、第二問題の解法を提示し、計算結果を進士報告および原田報告に示されている他の方法による結果と比較する。従来の級数展開法と今回の積分法による結果と比較するとつぎのことが言える。

#### 級数展開法の特徴

展開を打ち切った項による誤差が生じ、特に長距離において無視できなくなるために、長距離においても有効な展開公式を得るのに多大の労苦を要する。反面、数値を代入する実務の計算においては反復計算を要せず、一回の計算で完了する。

#### 積分法の特徴

展開打ち切りによる誤差はない。反面、逐次近似計算により収束するまで反復計算する。収束したかどうか判定に用いる定数により精度が左右される。しかし、これは任意に小さくとれる。また計算は反復を要するが計算機で行うので手計算で行うような誤りの可能性はない。

以下、次の順で記述する、・変分法、・数値積分法、・近似値、・第一問題、・第二問題。

### 1. 変分法

地球楕円体の長半径を  $a$ 、短半径を  $b$ 、離心率を  $e$ 、緯度を  $\phi$ 、経度を  $\lambda$  とするとき楕円体と表面上の直交座標値は次の式によって与えられる。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$x = \frac{a \cos \phi \cos \lambda}{w}$$

$$y = \frac{a \cos \phi \sin \lambda}{w} \quad (2)$$

$$z = \frac{a(1 - e^2) \sin \phi}{w}$$

$$(w = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi})$$

楕円体表面上の線素片を  $ds$  とすると、子午線曲率半径  $r_m$ 、平行圏曲率半径  $r_p$  を用いて、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= r_m^2 d\phi + r_p^2 d\lambda^2 \\ &= (r_m^2 + r_p^2 \lambda^2) d\phi^2 \end{aligned}$$

$$r_m = \frac{a(1 - e^2)}{w^3}$$

$$r_p = \frac{a \cos \phi}{w}$$

$$ds = \sigma_0 \sqrt{r_m^2 + r_p^2 \lambda^2} d\phi \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_c &= +1 \text{ (}\phi\text{が増加中, } \cos\alpha > 0 \text{の時)} \\ &= -1 \text{ (}\phi\text{が減少中, } \cos\alpha < 0 \text{の時)} \end{aligned}$$

ここで、 $\sigma_c$ は $\phi$ の増加または減少により、+1または-1となる定数である。これは後に導入する方位角 $\alpha$ の余弦の符号から計算できる。

変分法の一般理論によれば、次式の定積分Lに停留値を与える関数 $y$ は、次のオイラーの方程式に従う。

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y}) dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

この一般理論を上記のdsの式にあてはめると次の式が得られる。

$$\sigma_c \frac{r_p^2 \dot{\lambda}}{\sqrt{r_m^2 + r_p^2 \dot{\lambda}^2}} = K \tag{4}$$

上式から $\dot{\lambda}$ をKで表し次式が得られる。

$$\dot{\lambda} = \sigma_c K \frac{r_m}{r_p \sqrt{r_p^2 - K^2}} \tag{5}$$

$$ds = \sigma_c \frac{r_m r_p}{\sqrt{r_p^2 - K^2}} d\phi \tag{6}$$

上記がオイラー方程式による測地線の微分方程式と測地線素片であり、パラメータKにより測地線が特徴づけられる。

方位角 $\alpha$ を次式により導入すると、より一般的に知られている次の測地線の方程式が得られる。

$$\tan\alpha = \frac{r_p \dot{\lambda}}{r_m} \tag{7}$$

$$r_p \sin\alpha = K \tag{8}$$

測地線はパラメータKにより定まる。またこの定数は楕円体上の二点を与えることにより定まる。この二点の与えられ方としては、第1図のように $P_1$ と $P_2$ が共に、測地線上の最北端または最南端の点 $P_x$ (以下頂点という)を通る子午線の同じ側にある場合と第2図のように、その子午線の両側にある場合とがあり得る。前者の場合の積分経路を単調経路と呼び、後者の場合を反転経路と呼ぶことにする。反転経路は必ずしも長距離において生ずるわけではない。点 $P_1$ と $P_2$ の緯度が等しい場合には短距離でも反転経路になる。点 $P_1$ 、 $P_2$ と頂点 $P_x$ の緯度経度をそれぞれ $(\phi_1, \lambda_1)$ 、 $(\phi_2, \lambda_2)$ 、 $(\phi_x, \lambda_x)$ とし経路別に積分式を書くこと以下の通りとなる。

(1) 単調経路の場合

この場合、 $\phi_1$ から $\phi_2$ まで $\phi$ は単調に増加または減少するので、式(5)、(6)を直ちに積分してよく次式が得られる。

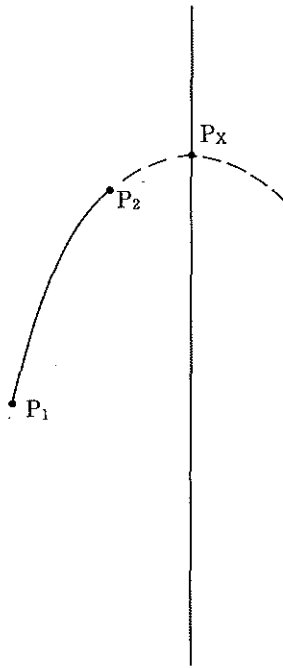


Figure 1. Single Route

When points  $P_1$  and  $P_2$  lie on the same side of the meridian, on which lies the top point  $P_x$  of the geodesics, the route of the integral is called "Single Route".

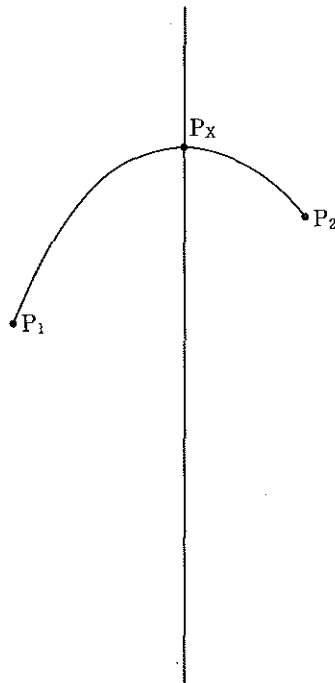


Figure 2. Return Route

When points  $P_1$  and  $P_2$  lie on the both sides of the meridian, the route of the integral is called "Return Route".

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \sigma_c K \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{r_m}{r_p \sqrt{r_p^2 - K^2}} d\phi \quad (9)$$

$$s = \sigma_c \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{r_m r_p}{\sqrt{r_p^2 - K^2}} d\phi \quad (10)$$

上記の場合  $\lambda_2$  と  $s$  は  $K$  の関数となっているので、近似的な  $K$  から、よりよい  $K$  を求めるに当たってテイラー展開の計算に必要な偏微分係数は容易に求めることができる。また  $\sigma_c$  の正負は  $P_1$  において求めればよく、積分区間で一定である。

(2) 反転経路の場合

この場合も定数  $K$  が点  $P_1$  と  $P_2$  の座標によって決定されることは同じであるが、積分は  $\phi_1$  から  $\phi_x$  までと、 $\phi_2$  から  $\phi_x$  までとの2項より成る。また、緯度  $\phi_x$  は下式により求められる。

$$\cos \phi_x = |K| \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a^2 - e^2 K^2}} \quad (11)$$

また  $\sin \phi_x$  は  $\cos \alpha$  と同符号となる。

この  $\phi_x$  と  $K$  及び点  $P_1$  における  $\sigma_c$  を用いて  $\lambda_x$ ,  $\lambda_2$ ,  $s$  を表すと次のようになる。

$$\lambda_x = \lambda_1 + \sigma_c K \int_{\phi_1}^{\phi_x} \frac{r_m}{r_p \sqrt{r_p^2 - K^2}} d\phi = \lambda_2 - \sigma_c K \int_{\phi_2}^{\phi_x} \frac{r_m}{r_p \sqrt{r_p^2 - K^2}} d\phi \quad (12)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \sigma_c K \int_{\phi_1}^{\phi_x} \frac{r_m}{r_p \sqrt{r_p^2 - K^2}} d\phi + \sigma_c K \int_{\phi_2}^{\phi_x} \frac{r_m}{r_p \sqrt{r_p^2 - K^2}} d\phi \quad (13)$$

$$s = \sigma_c \int_{\phi_1}^{\phi_x} \frac{r_m r_p}{\sqrt{r_p^2 - K^2}} d\phi + \sigma_c \int_{\phi_2}^{\phi_x} \frac{r_m r_p}{\sqrt{r_p^2 - K^2}} d\phi \quad (14)$$

反転経路の場合には  $K$  を変化させると被積分関数が変化するだけでなく、積分の上端である  $\phi_x$  も(11)により変化することになるので注意が必要である。

2. 数値積分法

上述の計算式は、積分によって  $\lambda_x$  や  $\lambda_2$ ,  $s$  を求めるようになっている。この積分を直ちに数値積分法によって計算してしまうのが本稿の寸法である。

数値積分の方法は下記の積分  $I$  を、適当な点での加重平均  $S$  によって近似するものである。

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x) dx$$

$$S = \sum w_i f(x_i)$$

この時、分点  $x_i$  と重み  $w_i$  の取り方によって、種々の方法がある。即ち、 $x_i$  を等間隔にとり、 $w_i$  を積分精度を上げるようにとるニュートン・コーツ法やマクローリン法、逆に  $w_i$  を等しくとり、 $x_i$  を積分精度を上げるようにとるチェビシエフの方法等である。ガウスの方法は  $x_i$ ,  $w_i$  とともに積分精度を上げるようにとる方法である。本稿においてはガウスの方法で分点を6個とる方法を用いた。この時、分点の座標と重みは次の値である。

$$\begin{aligned}
 -x_1 = x_6 &= 0.932469514203152 \\
 -x_2 = x_5 &= 0.661209386466265 \\
 -x_3 = x_4 &= 0.238619186083197 \\
 w_1 = w_6 &= 0.171324492379170 \\
 w_2 = w_5 &= 0.360761573048139 \\
 w_3 = w_4 &= 0.467913934572691
 \end{aligned}$$

式(8), (12), (13), (14)からもわかるように, 反転経路での計算では, 積分上端 $\phi_s$ において, 分母がゼロになり発散するので, 上記 $x_1, x_6$ のように端点の値を用いないガウス法はこの点でも非常に適している。

### 3. 近似値

逐次近似法においては, 最初にある近似値を与えてこれを次々に修正して, 真値に近づけていくので, 最初は何らかの方法によって近似値を与える必要がある。ここで必要とされる近似値は, 方位角, 距離, 経緯度である。これらについて, ベクトルと幾何の方法により計算する。

#### (1) 方位角の近似値

地球楕円体上の位置は, (2)によって表されるが, これを位置ベクトル $\vec{r}$ で表し, また法線ベクトル $\vec{n}$ ,  $z$ 軸方向の単位ベクトル $\vec{k}$ を用いると次のようになる。

$$\vec{r} = \frac{a}{w} \vec{n} - \frac{ae^2}{w} \sin\phi \vec{k} \quad (15)$$

ここで, 点Pにおける切平面上で東方ベクトル $\vec{E}$ , 北方ベクトル $\vec{N}$ を次式で導入する。

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \cos\lambda \\ -\sin\phi \sin\lambda \\ \cos\phi \end{pmatrix} \quad (16)$$

点 $P_1$ から点 $P_2$ へ向かう測地線の一つの近似は点 $P_1$ における法線と点 $P_2$ を含む垂直断面が楕円体を切って生ずる曲線であり, 方位角の一つの近似は, この垂直断面が点 $P_1$ における切平面と交わって生ずる線の方位角である。これを,  $\alpha'$ とすると, 点 $P_1$ , 点 $P_2$ のベクトルをそれぞれ $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ とにおいて, 以下により得られる。

$$\tan\alpha' = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{E}}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{N}} \quad (17)$$

これを整理すると次の式になる。

$$\tan\alpha' = \frac{\cos\phi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos\phi_1 \sin\phi_2 - \sin\phi_1 \cos\phi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - e^2 \cos\phi_2 \cos\phi_1 (\sin\phi_2 - \sin\phi_1 w_2/w_1)} \quad (18)$$

方位角のもう一つの近似値は点 $P_2$ における法線と点 $P_1$ を含む垂直断面が, 点 $P_1$ における切平面と交わって生ずる線の方位角である。これを $\alpha''$ とすると, 次式で与えられる。

$$\tan\alpha'' = -\frac{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{n}_2) \cdot \vec{N}}{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{n}_2) \cdot \vec{E}} \quad (19)$$

これを整理すると次の式になる。

$$\tan \alpha'' = \frac{\cos \phi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) - e^2 \sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) (\sin \phi_1 - \sin \phi_2 w_1 / w_2)}{\cos \phi_1 \sin \phi_2 - \sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + e^2 \cos \phi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) (\sin \phi_1 - \sin \phi_2 w_1 / w_2)} \quad (20)$$

この二個の近似値の平均値 $\alpha_0$ を用いて、方位角の近似値とする。点 $P_1$ と $P_2$ が同緯度にある時は、 $\alpha'$ と $\alpha''$ は等しい。また、二点が同一子午線上にある時もゼロで等しい。

上式での計算結果を比較する基準を第1表に示す。これは参考文献に示した進士報告によるもので、ヨルダン・エッゲルトの「測量学教程」のクナイスルによる第10版（以下JEKと略する）からの引用として、短距離（約130km, 以下ケースAとする）、中距離（約530km, 以下ケースBとする）、長距離（約1320km, 以下ケースCとする）の計算例として経緯度、方位角、距離の数値例が示されたものである。これを、今後の計算の基準として用いる。

近似値 $\alpha'$ 、 $\alpha''$ の平均値 $\alpha_0$ の計算結果を第2表に示す。これによれば、ベクトルの方法による方位角の近似値は距離130kmでは0".01程度、距離530kmでは0".1程度、距離1320kmでは0".8程度の精度を有することがわ

Table 1. Standard Examples of JEK

Constants : Bessel, 1841

$a = 6377397.15500\text{m}$      $e^2 = 0.006674372231315$

These values are taken from the report of Dr. Shinzi, "Calculation Accuracy of 200-mile geodesics", which appears in the REPORT OF HYDROGRAPHIC RESEARCHES No. 13 Mar. 1978.

	$P_1$	$P_2$	$\alpha, s$
A	$\phi_1 = 49^\circ 30' 0''$ $\lambda_1 = 0^\circ 0' 0''$	$\phi_2 = 50^\circ 30' 0''$ $\lambda_2 = 1^\circ 0' 0''$	$\alpha = 32^\circ 25' 21''.5109$ $s = 132315.375\text{m}$
B	$\phi_1 = 52^\circ 30' 16''.7$ $\lambda_1 = 0^\circ 0' 0''$	$\phi_2 = 54^\circ 42' 50''.6$ $\lambda_2 = 7^\circ 6' 0''$	$\alpha = 59^\circ 33' 0''.6892$ $s = 529979.578\text{m}$
C	$\phi_1 = 45^\circ 0' 0''$ $\lambda_1 = 0^\circ 0' 0''$	$\phi_2 = 55^\circ 0' 0''$ $\lambda_2 = 10^\circ 0' 0''$	$\alpha = 29^\circ 03' 15''.4598$ $s = 1320284.366\text{m}$

Table 2. Approximate azimuth

The approximate azimuth  $\alpha'$  is computed as the angle between the meridian plane and the plane decided by the normal vector  $\vec{n}_1$  and point  $P_2$ . The azimuth  $\alpha''$  is computed as the angle between the meridian plane and the plane decided by the normal vector  $\vec{n}_2$  and point  $P_1$ .

	$\alpha'$	$\alpha''$	$\alpha_0$
A	$32^\circ 25' 21''.5297$	$32^\circ 25' 21''.4737$	$32^\circ 25' 21''.5017$
B	$59^\circ 33' 0''.9325$	$59^\circ 33' 0''.2436$	$59^\circ 33' 0''.5880$
C	$29^\circ 03' 17''.4381$	$29^\circ 03' 11''.9138$	$29^\circ 03' 14''.6760$

かる。

## (2) 距離の近似値

円弧において、半径 $\rho$ と弦の長さ $\ell$ が定まると、対応する円弧の長さ $s$ は次式により近似なく正しく求まる。

$$s = 2\rho \sin^{-1} \left( \frac{\ell}{2\rho} \right) \quad (21)$$

楕円体上の二点間の距離の一つの近似として、この式を用いることができる。この時、点 $P_1, P_2$ の座標を $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ とすると、弦の長さ $\ell$ は次式で求められる。

$$\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (22)$$

また、曲率半径 $\rho$ は二点 $P_1, P_2$ の平均緯度 $\phi_m$ における測地線方位の曲率半径を用いる。

$$\sin \alpha_m = \sin \alpha_1 \frac{r_p(\phi_1)}{r_p(\phi_m)} \quad (23)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos \alpha_m^2}{r_m(\phi_m)} + \frac{\sin \alpha_m^2}{r_p(\phi_m)} \quad (24)$$

この方法は極めて単純でありながら、かなり精度がよい。計算結果を第3表の左欄に示す。これを表1の基準と比較すれば、距離130kmで1mm以上、530kmで2mm程度、1320kmで6cm程度の精度を有することがわかる。

上記の方法は簡単でかなり精度もよいがここでは距離計算と同時に積分経路が単調経路であるか反転経路であるかの判別も行うため、次の方法によることとする。即ち、二点 $P_1, P_2$ と原点 $O$ を通る平面で回転楕円体を切ると断面には傾斜した平面楕円が現れる。この傾斜楕円の南北軸に関し $P_1, P_2$ が同じ側にあれば単調経路、両側にあれば反転経路となり、これで経路の判別ができる。また、距離の近似値としては、この傾斜楕円について、先と同様に弦と弧の方法により求めるものである。

まず、 $x$ 軸、 $y$ 軸、 $z$ 軸方向のベクトルを $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ とすると、原点 $O$ 、点 $P_1, P_2$ より成る平面の法線ベクトル $\vec{v}$ は、規格化因子を $A$ として次式により求まる。

$$\vec{v} = A \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (25)$$

ベクトル $\vec{v}$ の成分を $(1, m, n)$ とし、第3図のように、断面が $xy$ 平面を切る線の $x$ 軸からの角度を $\Omega$ 、法線が $z$ 軸となす角を $i$ とすると次の関係がある。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix} \quad (26)$$

これより、

$$\Omega = \tan^{-1} \left( -\frac{1}{m} \right) \quad (27)$$



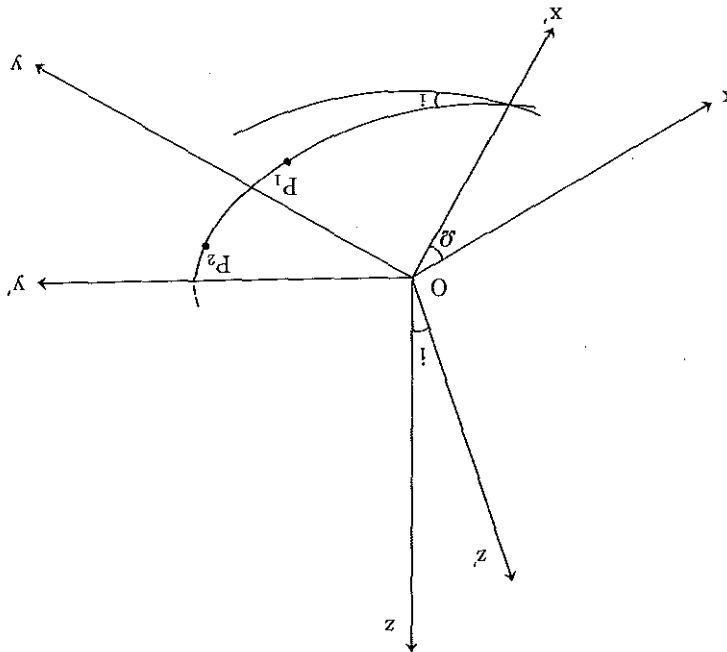


Figure 3. Rotation angle  $\Omega$  and  $i$

Points  $P_1$ ,  $P_2$  and the origin  $O$  make a plane, which is obtained from  $x$ - $y$  plane by rotating the system around the  $z$ -axis by  $\Omega$  and around the  $x'$ -axis by  $i$ .

Table 3. Approximate distances

Approximate distances in the left column are computed as the length of the arc by string and radius at mean latitude. Those in the right column are computed by the method of inclined ellipse in the plane decided by points  $P_1$ ,  $P_2$  and the origin  $O$ .

	$s(\text{azi. at } \phi_m)$	$s(\text{inc. ellipse})$
A	132315.375m	132315.375m
B	529979.580m	529979.578m
C	1320284.428m	1320284.347m

$$i = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1^2 + m^2}}{n} \right) \tag{28}$$

$z$  軸の回りに座標軸を角度 $\Omega$ だけ回転する行列を $R_z(\Omega)$ ,  $x$  軸の回りに角度 $i$ だけ回転する行列を $R_x(i)$ とし、断面を $x'$ ,  $y'$ 平面、ベクトル $\vec{v}$ を $z'$ 軸とする座標系でのベクトルを $\vec{r}'$ とすると変換は次式で表される。

$$\vec{r}' = R_x(i) R_z(\Omega) \vec{r} \tag{29}$$

変換行列は、角 $\Omega$ と $i$ を用いて、次式により表される。

$$R_z(\Omega) = \begin{pmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$R_x(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \quad (31)$$

逆変換は次式で表される。ベクトル $\vec{r}$ を $\vec{r}'$ であらわし、もとの回転楕円体の式に代入すると、次の平面楕円式が得られる。

$$\vec{r} = R_z(-\Omega) R_x(-i) \vec{r}' \quad (32)$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \left( \frac{\cos^2 i}{a^2} + \frac{\sin^2 i}{b^2} \right) y'^2 = 1 \quad (33)$$

この式から、平面楕円の長径が $a$ であり、短径、離心率をそれぞれ、 $b'$ 、 $e'$ とすると、次の式で表されることがわかる。

$$\frac{1}{b'^2} = \frac{\cos^2 i}{a^2} + \frac{\sin^2 i}{b^2} \quad (34)$$

$$e'^2 = 1 - \frac{b'^2}{a^2} \quad (35)$$

この平面楕円上の点を表すために次式で定義される楕円に対する法線の角 $\psi$ を用いる。

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{y'}{(\frac{1}{1-e'^2})x'} \right) \quad (36)$$

点 $P_1$ 、 $P_2$ に対応する $\psi$ をそれぞれ $\psi_1$ 、 $\psi_2$ とする。2点間距離のもう一つの近似値として、(36)に代入するのに(2)の弦長 $l$ と次式の曲率半径 $\rho$ を用いることができる。これは、平面楕円の法線角 $\psi_1$ と $\psi_2$ の平均値 $\psi_m$ における曲率半径である。

$$\rho = \frac{a(1-e'^2)}{(1-e'^2 \sin^2 \psi_m)^{3/2}} \quad (37)$$

この近似による結果をケースA、B、Cのそれぞれに対し、第3表の右欄に示す。この方法では、先の平均緯度での測地線方位角法よりも精度がよく、ケースAとBで1mm以上であり、ケースCで1.8cm程度の精度である。

### (3) 経緯度の近似値

点 $P_2$ の経緯度が未知数として必要とされる時には、他の点 $P_1$ の経緯度と、これからの方位角 $\alpha$ 、距離 $s$ が与件として与えられている。近似的には、第4図に示すように点 $P_1$ での法線ベクトル $\vec{n}_1$ と切平面内で方位角 $\alpha$ 方向の単位ベクトル $\vec{\alpha}$ を含む平面内で角度 $\gamma$ だけベクトル $\vec{\alpha}$ より下方を向いたベクトル $\vec{\beta}$ が地表を切る点の位置 $P_0$ として求められる。この点のベクトルを $\vec{r}_0$ とし $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$ 、 $\gamma$ と式(10)の点 $P_1$ における東方ベクトル $\vec{E}$ 、

北方ベクトル $\vec{N}$ , (24)による $\vec{\alpha}$ 方向の曲率半径 $\rho$ , 弦長 $\ell$ で表すと次のようになる。

$$\vec{\alpha} = \cos\alpha \vec{N} + \sin\alpha \vec{E} \quad (38)$$

$$\vec{\beta} = \cos\gamma \vec{\alpha} - \sin\gamma \vec{n}_1 \quad (39)$$

$$\gamma = \frac{s}{2\rho} \quad (40)$$

$$\ell = 2\rho \sin\gamma \quad (41)$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \ell \vec{\beta} \quad (42)$$

以上によりベクトル $\vec{r}_0$ が求められると, この点の経緯度は次式で求められる。

$$\lambda_0 = \tan^{-1} \left( \frac{y_0}{x_0} \right) \quad (43)$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{z_0}{(1-e^2)\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) \quad (44)$$

この計算の結果を第4表に示す。これは極めて簡易な式であるが, ケースAで $0''.0005$ 程度, ケースBで $0''.02$ 程度, ケースCで $0''.4$ 程度の精度を有する。

#### 4. 測地学第一問題

第一問題においては, 第一点 $P_1$ の座標 $(\phi_1, \lambda_1)$ と, 第二点 $P_2$ への方位角 $\alpha$ と距離 $s$ が与件とされ, 第二点 $P_2$ の座標 $(\phi_2, \lambda_2)$ が未知数とされる。積分法による計算の手順と結果は次の通りである。

##### (1) 計算手順

- i 前節第3項の方法により近似点 $P_0$ の座標 $(\phi_0, \lambda_0)$ を求める。
- ii 次項の第二問題の解法に説明する方法により,  $P_1, P_0$ 間の距離 $s_0$ を変分法と数値積分法により求める。この時, 点 $P_1$ の緯度 $\phi_1$ と方位角 $\alpha$ が与件であるので, 積分のパラメータ $K$ は式(8)によって計算される定数となっている。
- iii 式(8)によって点 $P_0$ における測地線の方位角 $\alpha_0$ を求め, 近似距離 $s_0$ と与件の距離により, 緯度の補正量 $\Delta\phi$ を次式で計算する。

$$\Delta\phi = \frac{(s - s_0)\cos\alpha_0}{r_m(\phi_0)} \quad (45)$$

ここで $\alpha_0$ を計算するに際しては, 単調経路か反転経路かの知識が必要となる。即ち, 単調経路ならば $\alpha_0$ は $\alpha$ と同一象限にあり, 反転経路の場合には, 隣の象限にある。

- iv 補正量 $\Delta\phi$ の絶対値が予め与えた正数より小さければ, 計算終了とし, そうでなければ, 補正された緯度をもってiiへ戻る。
- v 緯度 $\phi_2$ が収束し決定された後, 単調経路の場合には式(9)により, 反転経路の場合には, 式(13)によって,

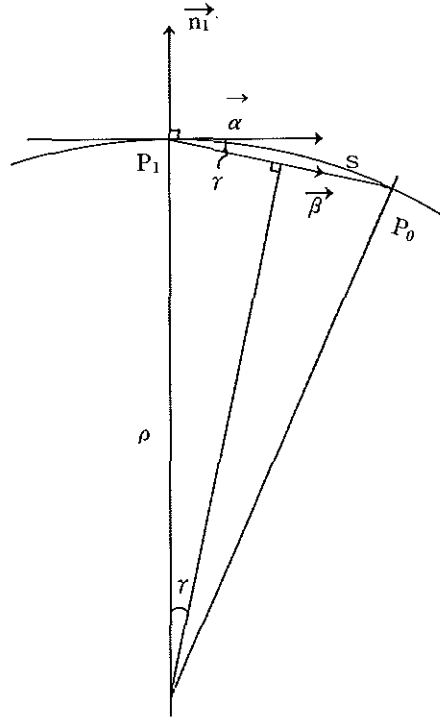


Figure 4. Approximate point  $P_0$

Approximate point  $P_0$  is obtained by unit vector  $\vec{\beta}$  and length  $l$  of the string. Declining angle  $\gamma$  is calculated from the radius  $\rho$  and distance  $s$ .

Table 4. Approximate coordinates

Approximate latitude  $\phi_0$  and longitude  $\lambda_0$  are computed by the method of declining angle  $\gamma$ , unit vector  $\vec{\beta}$  and length  $l$  of the string.

	$P_0(\phi_0, \lambda_0)$
A	$\phi_0 = 50^\circ 30' 00''.0002$ $\lambda_0 = 00^\circ 59' 59''.9995$
B	$\phi_0 = 54^\circ 42' 50''.6189$ $\lambda_0 = 7^\circ 5' 59''.9884$
C	$\phi_0 = 55^\circ 00' 00''.3445$ $\lambda_0 = 9^\circ 59' 59''.5739$

経度  $\lambda_2$  を計算する。

(2) 計算結果

計算結果を第5表に示す。基準とした第1表と比較して、ケースAとBでは、 $0''.0001$ 以上の精度があり、ケースCでは、 $0''.0001$ の差が生じていることがわかる。進士報告には、シュライバー法、進士氏により高精度化されたシュライバー法、ルジャンドル法、ヘルメルト法の4種の方法による結果が示されている。第5表の結果をそれらと比較すると、ケースAでは、それら4種の方法に生じている $0''.0001 \sim 0''.0002$ が本稿の積分法による結果には生じていない。ケースBでは、ヘルメルトの方法でも $0''.0001$ の差が生じているが積分

法では生じていない。ケースCでは、積分法でも0".0001の差が生じているが、ヘルメルト法では0".0002が生じていることがわかる。

Table 5. Results of the First Problem

Results of the first problem are computed by the integral method from the data of Table 1.

	$P_2(\phi_2, \lambda_2)$
A	$\phi_2 = 50^\circ 29' 60'' .0000$ $\lambda_2 = 00^\circ 59' 60'' .0000$
B	$\phi_2 = 54^\circ 42' 50'' .6000$ $\lambda_2 = 7^\circ 6' 00'' .0000$
C	$\phi_2 = 54^\circ 59' 59'' .9999$ $\lambda_2 = 9^\circ 59' 60'' .0000$

5. 測地学第二問題

第二問題においては、二点 $P_1, P_2$ の座標 $(\phi_1, \lambda_1)$ と $(\phi_2, \lambda_2)$ が与件とされ、距離 $s$ と $P_1$ から $P_2$ への方位角が未知数とされる。積分法による計算手順と結果は次の通りである。

(1) 計算手順

i 前節第一項に述べたベクトルと幾何の方法により近似方位角 $\alpha_0$ を求める。これを式(8)に代入して得た $K_0$ が積分パラメータの近似値になる。

ii 同様に前述した傾斜楕円の方法により距離の近似値 $s_0$ を求める。また、この時、断面の法線ベクトル $\vec{v}$ と回転角 $\Omega, i$ を計算して、座標変換行列 $R_z(\Omega), R_x(i)$ を求める。 $P_1, P_2$ の変換された $x'$ 座標により、 $x_1', x_2'$ が同符号ならば単調経路、異符号ならば反転経路と判別する。以下はこれを分けて考える。

a. 単調経路の時

iii-a 式(10)にパラメータ $K_0$ を用いて、積分法による距離 $s$ を求める。

iv-a 近似パラメータ $K_0$ に補正量 $\Delta K$ を加えて正しい $K$ を得るため、以下の式により(9)に $K_0$ を代入して得た $\lambda_2'$ と、(9)式を $K$ についてテイラー展開した第一項の $I_1, I_2$ を計算する。

$$\lambda_2' = \lambda_1 + \sigma_c K_0 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{r_m}{r_p \sqrt{r_p^2 - K_0^2}} d\phi \tag{46}$$

$$\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_2' \tag{47}$$

$$\Delta K = \frac{\Delta \lambda}{I_1 + K_0^2 I_2} \tag{48}$$

$$I_1 = \sigma_c \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{r_m}{r_p \sqrt{r_p^2 - K_0^2}} d\phi \tag{49}$$

$$I_2 = \sigma_c \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{r_m}{r_p (r_p^2 - K_0^2)^{3/2}} d\phi \tag{50}$$

v-a 計算値 $\lambda_2'$ と与件値 $\lambda_2$ の差 $\Delta \lambda$ 、または距離 $s$ と $s_0$ の差が十分小さければ距離計算終了とし、そうでなければ補正された $K$ を $K_0$ とし、距離 $s$ を近似距離 $s_0$ として、iii-aへ戻る。

vi-a 距離の計算が終了したら、 $K_0$  値から(8)式により方位角 $\alpha$ を求めて計算終了とする。

b. 反転経路の場合

iii-b 反転経路の場合には積分上限 $\phi_x$ も(11)で示されるようにパラメータ $K$ の関数となっている。従って近似値 $K$ に施すべき補正 $\Delta K$ の求め方は前述のようには行えないので、以下の方法により偏微分係数を求めることとする。

点 $P_1$ と $P_2$ が同緯度でない場合には式(8)による $\alpha'$ と(9)による $\alpha''$ は異なるのでこれを(8)に代入して得られる $K$ 値をそれぞれ $K_1$ 、 $K_2$ とおく。もし、二点が同緯度であれば、 $\alpha'$ から $K_1$ を求め、(11)で得られる $\phi_x$ に微量の変化(200kmで $0''.5$ 程度)を施した $\phi_x'$ を用いて(8)により $K_2$ を得る。

iv-b 上記の $K_1$ 、 $K_2$ を(9)に代入して得られた値をそれぞれ $\lambda_2'$ 、 $\lambda_2''$ とする。以下のように $\lambda_2$ との差を $l_1$ 、 $l_2$ とおき、 $(K, l)$ 平面において、 $l=0$ となる $K$ の値を求める。

$$l_1 = \lambda_2 - \lambda_2'$$

$$l_2 = \lambda_2 - \lambda_2''$$

$$\Delta K = \frac{K_2 - K_1}{l_2 - l_1} (-l_1) \quad (51)$$

$$K = K_1 - \sigma_l |\Delta K| \quad (52)$$

$$\sigma_l = +1 (l_1 > 0 \text{ の時})$$

$$= -1 (l_1 < 0 \text{ の時})$$

ここで、 $(K_1, l_1)$ 、 $(K_2, l_2)$ の添字は $l_1$ の絶対値の小さい方を $i=1$ としておく。

v-b 上記で得た $K$ を用いて式(8)、(9)に代入して得られた値をそれぞれ $\lambda_2$ 、 $s$ とする。経度 $\lambda_2$ または距離 $s$ が十分収束していれば、距離計算終了とし、そうでなければ、ここで得られた $(K, l)$ 対を改めて、 $(K_1, l_1)$ とし、前の $(K_1, l_1)$ を $(K_2, l_2)$ とおきかえて、iv-bへ戻る。

vi-b 上記の反復計算が収束したら、得られた $K$ により、方位角 $\alpha$ を求め計算終了とする。

## (2) 計算結果

計算結果を第6表に示す。この結果はケースBの530kmまで1mm以上の精度で第1表のJEKと一致している。ケースCにおいては2.4mmの違いが生じている。

Table 6. Results of the Second Problem

Results of the second problem are computed by the integral method from the data of Table 1.

	$\alpha$	s
A	32° 25' 21".5109	132315.3752m
B	59° 33' 0".6889	529979.5779m
C	29° 3' 15".4595	1320284.3684m

参考文献の原田氏の報告には国際楕円体を用いて次の超長距離での計算例が報告されている。これは球面三角法を用いたものであるとされている。

$$\text{与件: } \phi_1 = 10^\circ 0' 0'' \quad \lambda_1 = 0^\circ 0' 0''$$

$$\phi_2 = 55^\circ 0' 0'' \quad \lambda_2 = 49^\circ 35' 55''.480210$$

距離：s = 6606696.04340m

同じ与件値を使って、国際楕円体で本稿の積分法により計算すると次の結果が得られた。

距離：s = 6606696.04279m

方位： $\alpha = 30^\circ 35' 17''.23587$

この場合、距離の差は約0.6mmであり、極めて近い結果となっている。この与件の数値例は測地線の頂点の緯度 $\phi_x$ を $60^\circ$ にして、逆に作ったものとされている。従って、計算の収束の状況は頂点座標の $60^\circ$ への近ずき方によって示される。積分法での近ずき方は次の通りである。

第一近似値： $\phi_x = 60^\circ 00' 19''.58666$

第二近似値： $\phi_x = 59^\circ 59' 59''.99349$

第三近似値： $\phi_x = 60^\circ 00' 00''.00001$

以上の計算には、PC-9801UV21の倍精度計算を用いた。積分は、傾斜楕円の方法によって近似距離を求めたのち一区間が500kmを越えないような整数によって積分区間を分割して行った。さらに分割の数を2倍して結果が同じなら終了とした。またガウス積分法の分点については、29点の方法も行い比較したが違いはなかった。

## 謝 辞

本稿の検討に当たっては参考文献の小山報告は断面における傾斜楕円の考えについて、進士報告はJEKの基準データ、シュライバー法、修正シュライバー法、ルジャンドル法、ヘルメルト法の比較データについて、原田報告は超長距離の比較データについて参考になった。水路部航法測地課の佐々木補佐官にはガウス積分の定数の入手について配慮頂いた。プログラミング上の問題点等については六管区水路課諸氏の教示を受けた。以上、記して感謝します。

## 参 考 文 献

- 坪川家恒・大森又吉：測地学序説，山海堂，(1969)  
 日本測地学会：測地学の概観，日本測地学会，(1978)  
 日本測量協会：現代測量学，日本測量協会，(1981)  
 進士 晃：二百海里測地線の計算精度，水路部研究報告，13，p.89—110，(1978)  
 山内二郎・宇野利雄・一松 信：電子計算機のための数値計算法III，培風館，(1972)  
 原田健久：回転楕円体における長距離測地線に関する第2課題の解法，測地学会誌，8，1，p.23—28，(1962)  
 小山 薫：現用2既知点間の測地距離の計算式の紹介，昭和52年度天文観測技術打合せ会議報告書，p.66—69，(1978)  
 小山 薫：中長距離測地線の算式について：時小委員会資料58—2，(1982)