

近似式による天体暦

井上圭典・山口正義・澤 雅行 : 航法測地課

On an Approximate Expression to Substitute for Astronomical Ephemerides

Keisuke Inoue, Masayoshi Yamaguchi, Masayuki Sawa

Geodesy and Geophysics Division

1. 多様化した天体暦利用者

水路部で発行している天体位置表, 天測暦, 及び天測略暦は, 時々刻々に変化する天体の位置を時間を引数とした数表形式で表したもので, それぞれ1年間分をまとめて1冊とし発行しているが, 部厚いものになっている。部厚い大きな理由はこの暦類を利用する側の事情, すなわち今日のようにコンピュータが普及していない時代においては計算の手間をできるだけ省けるような形式で提供しなければ使えない事情を考慮したからである。

今でも大型コンピュータはおろか, パーソナルコンピュータも利用できない立場の人は, 現在の形式の天体暦を必要としていることに変わりはないが, パーソナルコンピュータを利用できる立場の人は, 別の形式の天体暦を要求しつつある。その一つは磁気媒体により発行される天体暦であるが, これに関する詳細は他にゆずる。その他の要求は次の四つに大別できる。

(1)直接自分で計算したいので理論式が知りたい。(2)精度が良くなくてもよいが, 永年使用できる略算式を知りたい。(3)高次補間が可能になったから時間間隔が粗くても, 数年間分を1冊にまとめたものが欲しい。(4)内容は変えず補間しなくてよい近似式を公表してもらいたい。

今回の小論は, この最後の要求に応ずるために開発した近似式の求め方をまとめたものである。ここで特にこの方法がコンピュータ化時代に対応するある一つ方法に過ぎないことを断わっておく。

2. 採用近似理論

天体は自身の爆発あるいは他天体との衝突といった事態以外では, その緩急の違いはあっても空間を連続的に運動しているが, これを表現する方法は大別して次の二つによっていた。

一つは比較的安定した軌道上で周期的運動を繰り返す天体に対してその運動方程式の解を無限級数として求めるもの, 他は一過性のものか, 軌道も周期も変動しやすく, 理論では押さえ込めない天体に対してその運動方程式の解を数値積分によってもとめるものであった。

ところが高速, 大容量, 高精度のコンピュータの出現でこの縄張りに変化が生じ, 後者の数値積分による方法が大勢を占めつつあり, 水路部においても1985年の天体位置表からこの方法による解を掲載している。

さて, 数学の近似理論によると連続関数は, その与えられた区間で, その関数にいくらでも近似させることができる多項式が存在することが証明されており, その目的に応じて数多くの方法が発表されているが, 今回はチェビシェフ近似理論を採用した。

3. 精密補間法

チェビシェフ近似理論は近似式の係数に直交関数系を用いる方法の一つで、もともと高次の微分積分が複雑になる解析的関数式を多項式で近似させ、その演算を容易にするためのものであって、チェビシェフ分点(チェビシェフ標本点)における関数値がいくらでも精密に求められることが前提となっている。

われわれの場合、天体の位置(関数)は等間隔の時刻(変数)に対してのみ計算されており、チェビシェフ分点に対応する時刻での位置は、補間法によって求めるしかない。この補間の精粗が近似式の精度と有効区間(期間)を左右するのであるが、正しい値を知っていない限り、どのような補間法による計算値がより精密であると断定する決め手がない。

いろいろと検討した結果、われわれは次のような方法を用いることでこの問題の一応の解決策とした。

記号 $[x_i] = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ を導入し階差商を次のように定義する。

$$[x_0 x_1] = \{ [x_1] - [x_0] \} / (x_1 - x_0)$$

$$[x_0 x_1 x_2] = \{ [x_1 x_2] - [x_0 x_1] \} / (x_2 - x_0)$$

$$\cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot$$

$$[x_0 x_1 \dots x_n] = \{ [x_1 x_2 x_3 \dots x_n] - [x_0 x_1 x_2 \dots x_{n-1}] \} / (x_n - x_0)$$

こうすると $f(x)$ は次式で表せる。

$$f(x) = [x_0] + (x - x_0)[x_0 x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0 x_1 x_2] + \dots \\ + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) [x_0 x_1 x_2 \dots x_n] + E(x).$$

ここに $E(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) [x_0 x_1 \dots x_n x]$ である。

$$\text{今 } S_0 = [x_0]$$

$$S_1 = S_0 + (x - x_0) [x_0 x_1]$$

$$S_2 = S_1 + (x - x_0)(x - x_1) [x_0 x_1 x_2]$$

•

•

•

$$S_n = S_{n-1} + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) [x_0 x_1 \dots x_n]$$

とおくと

$$E(x) = f(x) - S_n$$

である。そして最後の式の左辺は、真値 $f(x)$ と近似値 S_n との差であるが、計算できるのは S_n だけであるから近似の度合を知ることができない。

そこである x に対する $f(x)$ の精密な近似値は、数列 S_0, S_1, S_2, \dots を順次求めてゆき、ある正数 ϵ に対し、 $|S_n - S_{n-1}| < \epsilon$ を満足させる S_n であるとした。この方法の妥当性に関しては、天体の動きと同様な振る舞いをするいくつかのモデル式を使い検証した。

4. 最適近似式

近似多項式は、その有効区間(期間)はできるかぎり長く、その項数はできるかぎり短く、そして精度はできるだけ高いのが理想であるが、これらの要求は一般に互いに撞着するものである。

そこで期間，項数，精度をパラメータとしてシミュレーションで可能な限り理想に近いものを探り当てることにした。実際の作業に当たっては，用途に応じてある一つのパラメータを固定して（条件として与えて）残りの二つパラメータを動かして最適なものを捜し出した。

計算式を以下にまとめておく。

関数 $f(x)$ に区間 $a \leq x \leq b$ で近似する多項式は

$$F(x) = C_0 + C_1 \cos \theta + C_2 \cos 2\theta + \dots + C_{n-1} \cos (n-1)\theta$$

で与えられる。

ここに $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2x - (a+b)}{b-a} \right)$ であり， C_0, C_1, \dots, C_{n-1} は

$$C_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$C_j = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cos(j\theta_k), \quad j=1, 2, \dots, n-1$$

$$x_k = \frac{(b-a) \cos \theta_k + a + b}{2}$$

$$\theta_k = \frac{2n - 2k + 1}{n} 90^\circ$$

である。 x_k がチェビシェフ分点であり， $f(x_k)$ が精密補間法によって得られたものである。

このようにして得られた近似式を，われわれは最適近似式と呼んでいる。

5. 二，三の例

1989年の天測暦，天測略暦の付録に太陽，月，4惑星，45恒星の近似式，1990年の天体位置表の付録に月の近似式及び1989年の天文年鑑に惑星（日心）の近似式を発表した。第1，2，3表にそれぞれその一部を示した。

第1表 太陽, 金星, 火星 Sun, Venus, Mars 1989年

太陽の視赤経 (RA), 視赤緯 (Dec), 地心距離 (Dist)

C _N	1月1日~ 5月1日 a=1, b=121			4月30日~ 9月1日 a=120, b=244			8月31日~ 12月32日 a=243, b=366			C _N
	RA	Dec	Dist	RA	Dec	Dist	RA	Dec	Dist	
N	h	°	au	h	°	au	h	°	au	N
0	22.748984	-5.66628	.993330	6.616290	17.17026	1.012374	14.543830	-10.64748	.994556	0
1	3.857509	19.96689	.012759	4.135718	-3.36769	.000980	4.053791	-16.83724	-.013766	1
2	-.100137	1.64644	.002167	-.041433	-5.79179	-.004184	.151667	3.52298	.001879	2
3	.034781	-.96059	-.000639	-.040718	.21264	-.000045	.013029	.97458	.000719	3
4	.006130	.01335	-.000040	.005293	.15999	.000105	-.013512	-.02706	-.000027	4
5	-.002187	.00710	.000015	.003274	-.01062	.000006	-.002093	-.02340	-.000015	5
6	.000071	-.00344	.000004	-.000435	-.00504	.000003	.000305	-.00512	.000006	6
7	.000048	.00069	.000014	-.000125	.00072	.000008	.000223	-.00002	-.000005	7
8	-.000001	.00022	-.000002	-.000056	.00003	-.000009	.000022	.00050	-.000008	8
9	.000010	.00008	.000007	.000014	-.00020	.000001	.000003	-.00006	-.000001	9
10	.000058	.00030	-.000006	.000024	.00012	-.000011	-.000029	.00000	-.000013	10
11	-.000026	-.00016	-.000017	-.000063	.00011	-.000009	.000064	.00025	.000007	11
12	-.000051	-.00039	.000006	-.000034	.00017	.000014	.000024	-.00025	.000015	12
13	.000013	.00009	.000010	.000044	.00000	.000007	.000043	-.00016	-.000005	13
14	.000020	.00020	-.000002	.000016	-.00017	-.000007	-.000008	.00017	-.000007	14
15	-.000003	-.00004	-.000003	-.000016	-.00002	-.000003	-.000014	.00006	.000002	15
16	-.000005	-.00005	.000000	-.000006	.00005	.000003	-.000002	-.00003	.000002	16
17	.000003	.00001	.000001	.000007	.00000	.000001	.000005	-.00003	-.000001	17

金星の視赤経 (RA), 視赤緯 (Dec), 地心距離 (Dist)

C _N	1月1日~ 5月1日 a=1, b=121			4月30日~ 9月1日 a=120, b=244			8月31日~ 12月32日 a=243, b=366			C _N
	RA	Dec	Dist	RA	Dec	Dist	RA	Dec	Dist	
N	h	°	au	h	°	au	h	°	au	N
0	22.183628	-7.13437	1.655417	8.110387	12.72325	1.488831	17.232669	-18.52094	.733709	0
1	4.909554	20.94557	.096712	5.093582	-12.38276	-.273873	4.047891	-5.13144	-.445437	1
2	-.145295	4.47543	-.037661	-.169789	-8.17625	-.046150	-.436770	7.60987	.007040	2
3	.035184	-1.67990	-.001516	-.050487	1.15130	.003208	-.246043	-.35892	.008765	3
4	.023793	-.08863	-.000253	.029491	.31967	.000488	-.050888	-.56462	.002490	4
5	-.004736	.04148	.000022	.003846	-.07500	-.000079	.000343	-.03652	.000820	5
6	-.000775	-.01227	.000017	-.003092	-.00437	-.000005	-.000688	.02042	.000211	6
7	.000417	.00017	.000012	.000130	.00667	.000015	-.000480	.00164	.000049	7
8	-.000090	.00105	-.000002	.000296	-.00070	-.000005	.000406	-.00120	-.000003	8
9	-.000009	-.00007	.000009	-.000050	-.00071	.000004	.000353	.00025	.000000	9
10	.000049	.00013	-.000009	.000009	.00012	-.000009	.000091	.00002	-.000015	10
11	-.000024	-.00009	-.000016	-.000020	.00016	-.000015	-.000096	-.00010	-.000007	11
12	-.000027	-.00022	.000008	-.000032	.00017	.000009	-.000046	-.00020	.000016	12
13	.000011	.00006	.000008	.000015	-.00001	.000010	.000058	-.00003	.000005	13
14	.000009	.00011	-.000003	.000014	-.00013	-.000004	.000032	.00018	-.000007	14
15	-.000002	-.00003	-.000003	-.000005	-.00001	-.000003	-.000015	.00006	-.000002	15
16	-.000002	-.00002	.000000	-.000005	.00004	.000002	-.000013	-.00004	.000001	16
17	.000002	.00000	.000000	.000003	.00001	.000001	.000005	-.00004	.000001	17

火星の視赤経 (RA), 視赤緯 (Dec), 地心距離 (Dist)

C _N	1月1日~ 5月1日 a=1, b=121			4月30日~ 9月1日 a=120, b=244			8月31日~ 12月32日 a=243, b=366			C _N
	RA	Dec	Dist	RA	Dec	Dist	RA	Dec	Dist	
N	h	°	au	h	°	au	h	°	au	N
0	3.549301	18.31383	1.536654	8.720609	17.20012	2.411506	13.805615	-9.06408	2.529351	0
1	2.441262	8.45778	.555289	2.627728	-9.80541	.289727	2.626321	-14.21241	-.169117	1
2	.106878	-1.73496	-.010263	-.059444	-2.00050	-.055059	.088304	1.02161	-.052689	2
3	-.014721	-.25710	-.005195	-.000017	.20847	-.001909	.013857	.31670	.002595	3
4	-.000391	.02445	.000200	.003040	.01084	.000219	-.001600	.01214	.000380	4
5	-.000440	.00189	.000011	-.000144	-.00279	.000011	-.000390	-.00073	-.000006	5
6	.000107	.00029	-.000004	-.000044	.00032	.000001	-.000031	-.00050	-.000001	6
7	-.000032	-.00020	.000008	.000016	-.00002	.000011	.000017	-.00015	-.000008	7
8	.000022	.00018	.000008	.000019	-.00010	-.000007	-.000003	.00006	-.000010	8
9	-.000008	-.00011	.000001	-.000006	-.00004	-.000002	-.000002	-.00001	.000001	9
10	.000018	.00003	.000011	.000014	-.00003	-.000004	-.000012	.00004	-.000009	10
11	.000035	.00013	-.000011	-.000015	.00009	-.000015	-.000022	.00010	.000009	11
12	-.000031	-.00016	-.000013	-.000023	.00012	.000008	.000013	-.00013	.000015	12
13	-.000024	-.00004	.000008	.000012	-.00004	.000013	.000015	-.00007	-.000008	13
14	.000015	.00010	.000006	.000011	-.00009	-.000004	-.000005	.00007	-.000008	14
15	.000009	.00000	-.000003	-.000003	.00001	-.000005	-.000005	.00003	.000003	15
16	-.000003	-.00005	-.000002	-.000005	.00002	.000002	-.000002	.00000	.000002	16
17	-.000002	.00000	.000001	.000003	-.00001	.000002	.000003	-.00001	-.000001	17

第2表 月 Moon 1990

月の視赤経 (RA), 視赤緯 (Dec), 地平視差 (HP)

1月1日~2月1日 a=1, b=32				1月31日~3月1日 a=31, b=60			
C _N	RA	Dec	HP	RA	Dec	HP	C _N
N	h	°	°	h	°	°	N
0	11.56865803	- .6789069	.961784628	13.04907927	3.1951402	.965919929	0
1	13.57387130	-5.7393481	-.004883070	12.64335795	-10.3896594	.000104265	1
2	-.20859221	.8433738	.023316451	-.17410153	10.9937566	.039469704	2
3	.10313301	21.6365726	.025849119	.22592240	18.2103328	.012438378	3
4	.11943128	-.7509720	-.015276203	-.02107884	-4.0764559	-.015561263	4
5	-.21631131	-4.2929274	-.009332246	-.16493756	-2.4091180	-.006612678	5
6	-.01884666	.6812011	.004105960	.08864462	.3886609	.001587172	6
7	.12387979	-.1216019	.001626715	.05455470	-.3253086	.001277732	7
8	-.00967792	-.2862435	-.000911140	-.02723775	.1068910	-.000076375	8
9	-.02443699	.3248119	.000115427	-.00210219	.1516250	.000060931	9
10	.00924198	.0426678	.000160190	-.00110800	-.0757884	.000040831	10
11	-.00478856	-.1261190	-.000147945	-.00269665	-.0173231	-.000065239	11
12	-.00304292	.0195972	-.000010599	.00376300	.0148503	-.000014486	12
13	.00553002	.0185520	-.000040707	.00034982	-.0041193	.000009876	13
14	-.00015427	-.0152706	-.000007739	-.00128066	.0033165	.000000681	14
15	-.00195634	.0071798	-.000005217	.00019659	.0011863	-.000000194	15
16	.00067161	.0041957	.000004229	.00001077	-.0026603	.000000840	16
17	.00009087	-.0057168	-.000000447	-.00003085	.0003887	-.000000084	17
18	-.00033335	.0003843	-.000001137	.00013944	.0004995	-.000000255	18
19	.00027362	.0016693	.000000470	-.00004540	-.0002012	.000000010	19
20	.00004908	-.0008639	.000000137	-.00004488	.0001152	.000000023	20
21	-.00015383	.0000496	-.000000154	.00002322	-.0000284	-.000000008	21
22	.00003883	.0003625	.000000027	-.00000092	-.0000800	.000000004	22
23	.00003156	-.0002823	.000000030	-.00000040	.0000451	.000000004	23
24	-.00003077	-.0000336	-.000000019	.00000436	.0000097	-.000000001	24
25	.00001088	.0001315	-.000000002	-.00000378	-.0000114	-.000000001	25
26	.00000908	-.0000465	.000000006	-.00000075	.0000050	.000000000	26
27	-.00001139	-.0000192	-.000000002	.00000150	-.0000026	.000000000	27
28	.00000115	.0000299	-.000000001	-.00000033	-.0000017	.000000000	28
29	.00000401	-.0000125	.000000001	.00000000	.0000025	.000000000	29
30	-.00000244	-.0000071	.000000000	.00000012	-.0000003	.000000000	30
31	.00000000	.0000097	.000000000	-.00000020	-.0000005	.000000000	31
32	.00000110	-.0000018	.000000000	.00000004	.0000003	.000000000	32
33	-.00000075	-.0000028	.000000000	.00000007	-.0000001	.000000000	33
34	-.00000012	.0000022	.000000000	-.00000003	.0000000	.000000000	34
35	.00000041	-.0000003	.000000000	.00000000	.0000001	.000000000	35
36	-.00000016	-.0000008	.000000000	.00000000	.0000000	.000000000	36
37	-.00000008	.0000006	.000000000	-.00000001	.0000000	.000000000	37
38	.00000011	.0000000	.000000000	.00000001	.0000000	.000000000	38
39	-.00000004	-.0000003	.000000000	.00000000	.0000000	.000000000	39
40	-.00000004	.0000001	.000000000	.00000000	.0000000	.000000000	40
41	.00000005	.0000000	.000000000	.00000000	.0000000	.000000000	41

第3表 日心座標 (瞬時の平均春分点, 黄道)

金星				火星			
1月0日~12月32日 a=1, b=367				1月0日~12月32日 a=1, b=367			
C _N	黄経	黄緯	動径	C _N	黄経	黄緯	動径
N	°	°	au	N	°	°	au
0	156.8212	-.4879	.723964	0	146.2409	.9753	1.590036
1	292.7214	-.3877	-.001415	1	84.0642	-.2259	.028660
2	.0040	-.0530	.000061	2	-.8693	-.8441	-.071024
3	-.4935	-.3922	-.001432	3	1.3171	.0375	-.002693
4	.2672	2.6429	-.003516	4	.0086	.0156	.003019
5	.3635	.3198	.001146	5	-.0050	-.0011	-.000053
6	-.0970	-.9572	.001273	6	.0021	.0017	.000040
7	-.1021	-.0670	-.000257	7	-.0013	-.0001	.000004
8	.0055	.1565	-.000195				
9	.0389	.0038	.000036	木星			
10	.0052	-.0219	.000020	1月0日~12月32日 a=1, b=367			
11	-.0145	.0012	-.000006	C _N	黄経	黄緯	動径
12	-.0020	.0042	-.000002	N	°	°	au
13	.0039	-.0003	.000001	0	80.3909	-.4376	5.089257
14	.0004	-.0010	.000000	1	15.8856	.3366	.059761
15	-.0009	.0000	.000000	2	-.0938	.0065	.001955
16	.0000	.0002	.000000	3	-.0014	-.0012	-.000198
17	.0002	.0000	.000000				
土星				天王星			
1月0日~12月32日 a=1, b=367				1月0日~12月32日 a=1, b=367			
C _N	黄経	黄緯	動径	C _N	黄経	黄緯	動径
N	°	°	au	N	°	°	au
0	280.6008	.5569	10.036582	0	273.4170	-.2570	19.347293
1	5.5182	-.2331	-.008163	1	2.1136	-.0268	.032758
2	.0020	-.0014	-.001270	2	-.0018	.0001	-.000012
海王星				冥王星			
1月0日~12月32日 a=1, b=367				1月0日~12月32日 a=1, b=367			
C _N	黄経	黄緯	動径	C _N	黄経	黄緯	動径
N	°	°	au	N	°	°	au
0	280.9895	.9038	30.214894	0	224.2076	15.7288	29.656909
1	1.0891	-.0288	-.004556	1	1.2933	-.1503	-.001071
2	.0000	-.0001	.000052	2	-.0004	-.0019	.000757

報告者紹介



Keisuke Inoue

井上圭典 平成元年3月現在、
本庁水路部航法測地課主任航法測地
調査官



Masayosi Yamaguchi

山口正義 平成元年3月現在、
本庁水路部航法測地課航法測地調査
官



Masayuki Sawa

澤雅行 平成元年3月現在、
本庁水路部航法測地課航法測地調査
官付